T^ale S2 — *3 octobre 2019*

Devoir n° 2 : Trigo, récurrence et suites (1h15)

I **(2 points)** Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes.

$f_1(x) = x\sin(2x)$

$f_2(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$

II **(2 points)** Résoudre dans $[0; 2\pi]$:

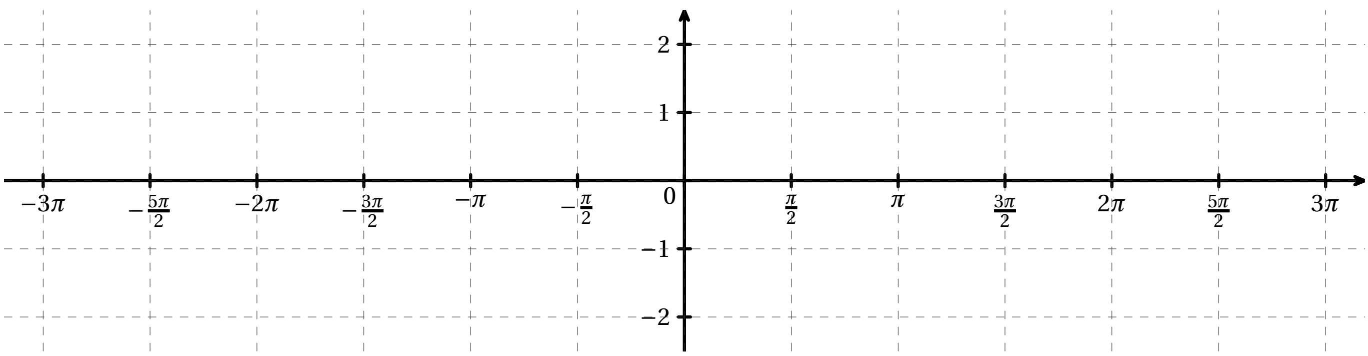
$$\sin(4x) = 0$$

III **(5 points)** Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = 2^{2n} - 3^n$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = \dfrac{3n^4 - 5n^2}{2n^3+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $w_n = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + ... + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
4. $z_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

IV **(3 points)** Soit $f(x) = \sin^2 x$.

1. Montrer que f est paire et π-périodique. On étudie désormais f sur $I = [0; \frac{\pi}{2}]$
2. Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau variations de f sur I en y précisant bien les valeurs de $f'(x)$ aux bornes de I.
3. Tracer la courbe représentative de f de manière sommaire sur le graphe ci-joint.



V **(4 points)** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{3 + 2u_n}$$

Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{3}{u_n}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
2. En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.
3. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

VI **(4 points)** Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n + 1 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n^2$.
2. La suite (u_n) est-elle minorée ? majorée ? Justifier.

VII✶ **Bonus (1 point)** Déterminer la limite de la suite (u_n) où $u_n = \dfrac{0{,}2^n - 0{,}3^n}{0{,}2^n + 0{,}3^n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$.