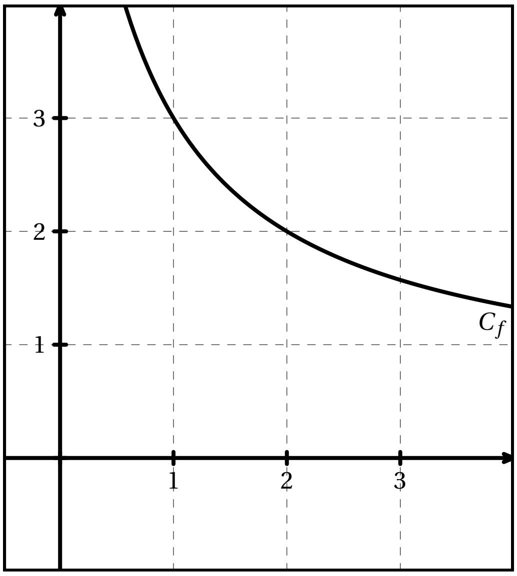
Devoir n° 3 : Suites (1h15)

I **(7 points)** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x+8}{2x+1}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.

1. Représenter les premiers termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses. Puis faire une conjecture quant à l'éventuelle limite de la suite (u_n).
2. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par :
$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$
Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. On note $S_n = v_0 + v_1 + \ldots v_n$. Exprimer S_n en fonction de n.



II **(8 points)** Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\, u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   b) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; On admet que :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

   c) Déterminer la valeur de la limite ℓ.

III **(5 point)**
On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{n+1} & = \dfrac{1}{2-u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 0. \end{cases}$$

On obtient à l'aide d'un tableur les premiers termes de cette suite :

	A	B	C
1		u_n	u_n
2	n	(en valeurs exactes)	(en valeurs approchées)
3	0	0	0
4	1	1/2	0,5
5	2	2/3	0,666 666 667
6	3	3/4	0,75
7	4	4/5	0,8
8	5	5/6	0,833 333 333
9	6	6/7	0,857 142 857
10	7	7/8	0,875
11	8	8/9	0,888 888 889
12	9	9/10	0,9
13	10	10/11	0,909 090 909

Prouver que la suite (u_n) converge.

IV **Bonus (1 point)** Montrer la question 4b de l'exercice II.