DS n° 1

I

$$\frac{2x^2-x+3}{3x} \geqslant 2$$

$$\iff \frac{2x^2-x+3-6x}{3x} \geqslant 0$$

$$\iff \frac{2x^2-7x+3}{3x} \geqslant 0$$

Etude de $P(x) = 2x^2-7x+3$: $\Delta = 49-24 = 25$

donc P admet deux racines : $x_1 = \frac{7+5}{4} = 3$ et $x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$

On dresse alors le tableau de signes.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x^2-7x+3$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$3x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Quotient		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{S = \left]0\,;\frac{1}{2}\right] \cup [3\,;+\infty[}$

II

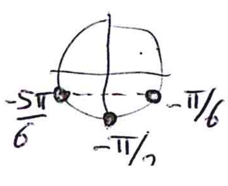
$$2\sin^2(x) + 3\sin(x) + 1 = 0. \quad (E)$$

Soit $X = \sin x$.

$(E) \iff 2X^2+3X+1 = 0$.

$\Delta = 9-8 = 1$ donc $X = \frac{-3-1}{4} = -1$ ou $X = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

Donc $\sin x = -1$ ou $\sin x = -\frac{1}{2}$



$\boxed{S = \left\{ -\pi/2\,; -\frac{5\pi}{6}\,; -\pi/6 \right\}}$

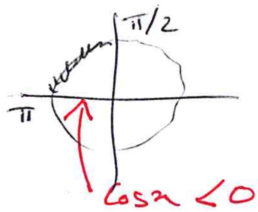
III On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= 1 - \frac{4}{49} = \frac{45}{49}$

donc $\cos x = \sqrt{\frac{45}{49}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\frac{45}{49}}$

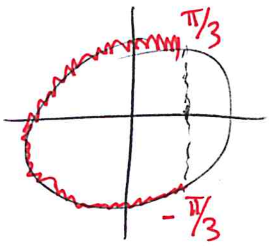
mais $x \in [\frac{\pi}{2} ; \pi]$ donc $\cos x < 0$



alors $\cos x = -\sqrt{\frac{45}{49}}$

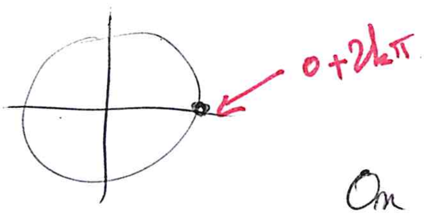
$= -\frac{\sqrt{45}}{7} = \boxed{-\frac{3\sqrt{5}}{7}}$

IV ① $2\cos x < 1 \iff \cos x < \frac{1}{2}$



donc $S = [-\pi ; -\frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3} ; \pi]$

② $\cos 3x = 1 \iff 3x = 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$



$\iff x = \frac{2k\pi}{3} \; ; k \in \mathbb{Z}$

On a 3 solutions dans $[-\pi ; \pi]$:

$$\boxed{S = \left\{ \underset{k=-1}{-\frac{2\pi}{3}} ; \underset{k=0}{0} ; \underset{k=1}{\frac{2\pi}{3}} \right\}}$$

V Soit P_n la ppté $u_n = 3 - 2^n$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Initialisation : Pour $n = 0$; $u_0 = 2$ et $3 - 2^n = 3 - 1 = 2$

donc P_0 vraie.

Hérédité Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons P_k vraie et montrons P_{k+1} vraie.

On a $u_{k+1} = 2u_k - 3$

$= 2.(3 - 2^k) - 3$ (car P_k vraie)

$= 6 - 2^{k+1} - 3$

$= 3 - 2^{k+1}$ donc P_{k+1} vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 3 - 2^n}$.

VI ① D'après le graphique on conjecture que :

pour $m > 5$ on a 2 pts d'intersection.

pour $m = 5$ ou $m = -3$ on a 1 pt d'intersection.

pour $m < -3$ on a 2 pts d'intersection

pour $m \in]-3 ; 5[$, il n'y a pas de point d'intersection.

(2) $\forall (x;y) \in \Delta_m \cap C_f$

ssi $\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = mx - 4$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + x(1-m) + 8 = 0$

$\Delta_m = (1-m)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8$

$= m^2 + 2m + 1 - 16$

$= m^2 - 2m - 15$

On étudie le signe de Δ qui est une fonction de degré 2 par rapport à m.

$\delta = 4 + 4 \times 15 = 64$

donc Δ_m admet deux racines : $m_1 = \frac{2+8}{2} = 5$ et $m_2 = \frac{2-8}{2} = -3$

D'où le tableau de signes de Δ_m :

m		-3		5	
Δ_m	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi, la conjecture est vérifiée :

pour $m \in]-\infty ; -3[\cup]5 ; +\infty[$, $\Delta_m > 0$ et on a 2 pts d'intersect°

pour $m \in \{-3 ; 5\}$; $\Delta_m = 0$ et on a un seul pt d'intersect°

pour $m \in]-3 ; 5[$; $\Delta_m < 0$ et on a aucun pt d'intersect°.