

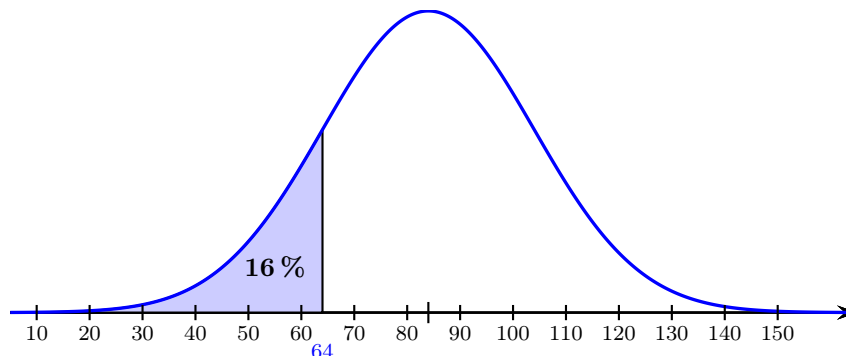
Devoir de Mathématiques N° 16 - Lois continues (1h)

I Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ . De plus, on a $P(X \leq 64) = 0,16$.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1. a) En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leq X \leq 104)$.
b) Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?
2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{X - 84}{\sigma}$.
a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
b) Justifier que $P(X \leq 64) = P\left(Z \leq \frac{-20}{\sigma}\right)$.
c) En déduire la valeur de σ , arrondie à 10^{-3} .
3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} .
a) Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.
b) Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.

L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.

Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).
a) Quelle est la probabilité qu'exactly 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3} .
b) Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3} .
2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.
On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.
a) Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y .
b) Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

II Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

A l'évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;

C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0,03x + 0,95$.
2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.
Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans.
Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.
2. Calculer $P(Z > 2)$.
3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

Partie C

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100 g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Calculer $P(83 < X < 87)$.
Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage ?
2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que :

$$P(85 - a < X < 85 + a) = 0,9.$$

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. La chocolaterie vend un lot de 10 000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle $[81,7; 88,3]$.

Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère.

Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?