

# Devoir de Mathématiques N° 15 - Intégrales et Espace (2h)

## I (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.

Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Une justification succincte est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points  $A(1 ; -1 ; -1)$ ,  $B(1 ; 1 ; 1)$ ,  $C(0 ; 3 ; 1)$  et le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $2x + y - z + 5 = 0$ .

**Question 1 :** Soit  $\mathcal{D}_2$  la droite de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

- a. La droite  $\mathcal{D}_2$  et le plan  $\mathcal{P}$  ne sont pas sécants
- b. La droite  $\mathcal{D}_2$  est incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ .
- c. La droite  $\mathcal{D}_2$  et le plan  $\mathcal{P}$  se coupent au point  $E\left(\frac{1}{3} ; -\frac{7}{3} ; \frac{10}{3}\right)$ .
- d. La droite  $\mathcal{D}_2$  et le plan  $\mathcal{P}$  se coupent au point  $F\left(\frac{4}{3} ; -\frac{1}{3} ; \frac{22}{3}\right)$ .

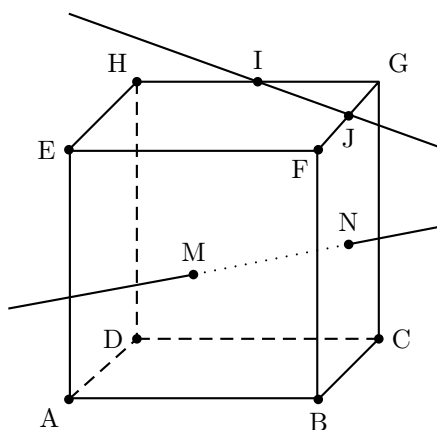
**Question 2 :**

- a. L'intersection du plan  $\mathcal{P}$  et du plan (ABC) est réduite à un point.
- b. Le plan  $\mathcal{P}$  et le plan (ABC) sont confondus.
- c. Le plan  $\mathcal{P}$  coupe le plan (ABC) selon une droite.
- d. Le plan  $\mathcal{P}$  et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

**Question 3 :** Une mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$  arrondie au dixième de degré est égale à :

- a.  $22,2^\circ$
- b.  $0,4^\circ$
- c.  $67,8^\circ$
- d.  $1,2^\circ$

**Question 4 :** La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [GH] et [FG]. Les points M et N sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.

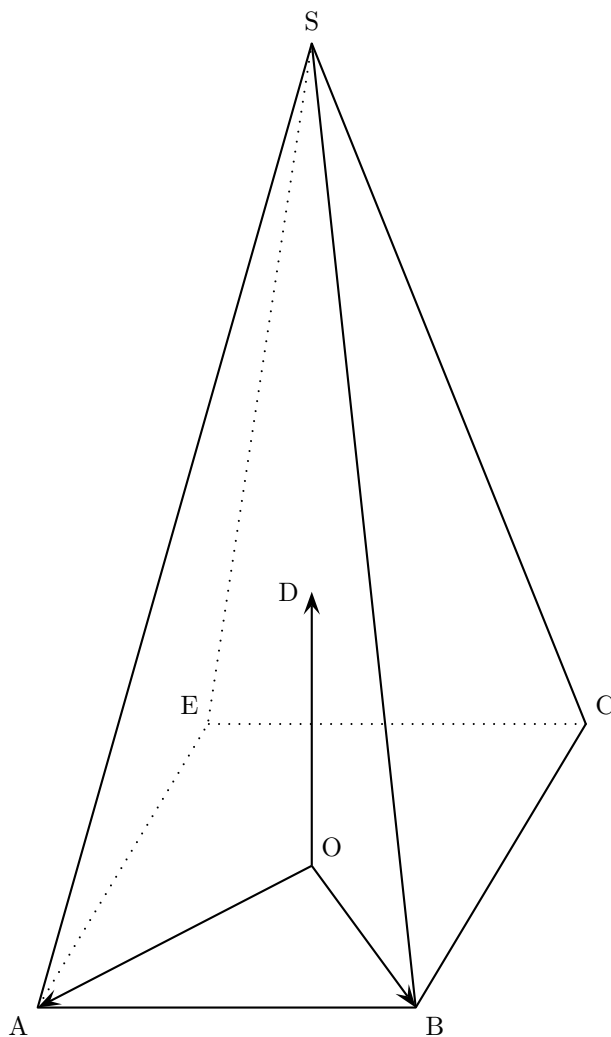


Les droites (IJ) et (MN) sont :

- a) perpendiculaires
- b) sécantes, non perpendiculaires
- c) orthogonales
- d) parallèles

## II (8 points)

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que  $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$  soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées  $(0 ; 0 ; 3)$  dans ce repère.



### Partie A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
3. Soit K le point de coordonnées  $\left(\frac{5}{6} ; -\frac{1}{6} ; 0\right)$ .

Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

### Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est  $\frac{5\sqrt{43}}{18}$ .

1. On admet que le point U a pour coordonnées  $\left(0 ; \frac{2}{3} ; 1\right)$ .

Vérifier que le plan (EAU) a pour équation  $3x - 3y + 5z - 3 = 0$ .

2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.
3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).
4. Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

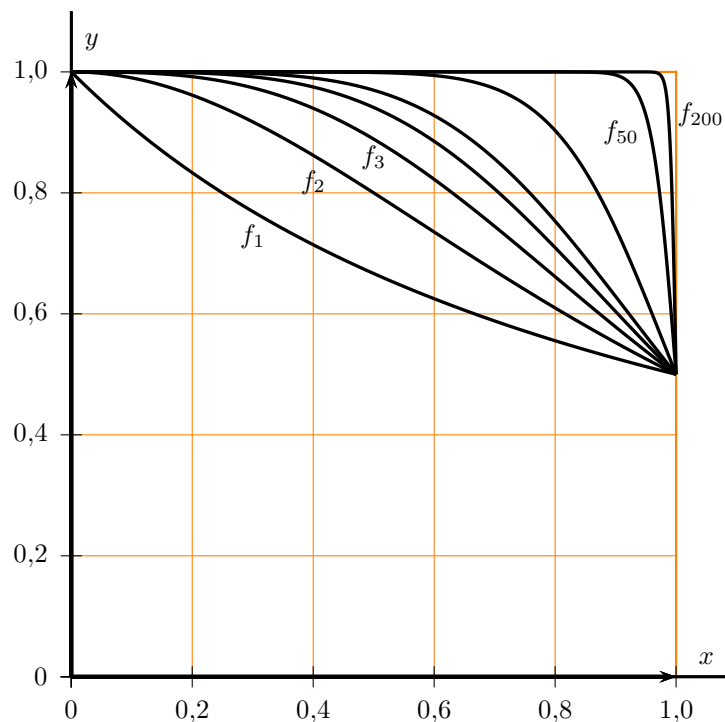
**III (8 points)** Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.  
On note  $f_n$  la fonction définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit le nombre  $I_n$  par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} \, dx.$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions  $f_n$  obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.



En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite  $(I_n)$  l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. Calculer la valeur exacte de  $I_1$ .

3. a) Démontrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  $I_n \leq 1$ .

4. Démontrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale  $\int_0^1 (1 - x^n) \, dx$ .

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite  $(I_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

|                         |                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Variables :</b>      | $n, p$ et $k$ sont des entiers naturels<br>$x$ et $I$ sont des réels                                                                                                                                                                        |
| <b>Initialisation :</b> | $I$ prend la valeur 0                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Traitement :</b>     | Demander un entier $n \geq 1$<br>Demander un entier $p \geq 1$<br>Pour $k$ allant de 0 à $p - 1$ faire :<br>$x$ prend la valeur $\frac{k}{p}$<br>$I$ prend la valeur $I + \frac{1}{1 + x^n} \times \frac{1}{p}$<br>Fin Pour<br>Afficher $I$ |

a) Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs  $n = 2$  et  $p = 5$  ?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de  $I$  seront arrondies au millièm.

| $k$ | $x$ | $I$ |
|-----|-----|-----|
| 0   |     |     |
|     |     |     |
|     |     |     |
|     |     |     |
| 4   |     |     |

b) Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale  $I_n$ .

**IV** (Bonus) Montrer que pour tout entier  $n$  supérieur à 8 :

$$n^{\sqrt{n+1}} > (n+1)^{\sqrt{n}}$$