Devoir de Mathématiques N^o 10 (2h) - Ln, exponentielle, complexes

I **(3 points)** La suite (z_n) de nombres complexes est définie par

$$z_0 = 2+3\mathrm{i} \text{ et, } \quad \text{pour tout entier naturel } n \text{ par } z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n.$$

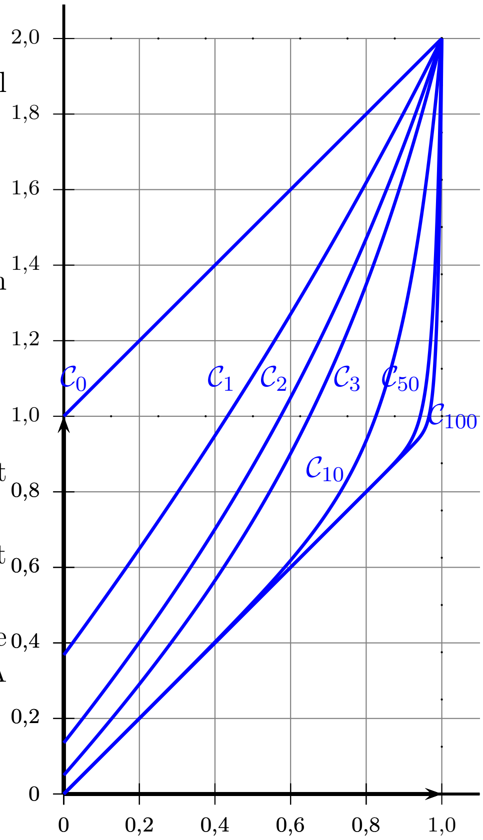
Pour quelles valeurs de n, $|z_n|$ est-il inférieur ou égal à 10^{-20} ?

II **(6 points)**

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Quelques-unes des courbes $\mathcal{C}_n$ sont représentées ci-contre.



Partie A : généralités sur les fonctions f_n

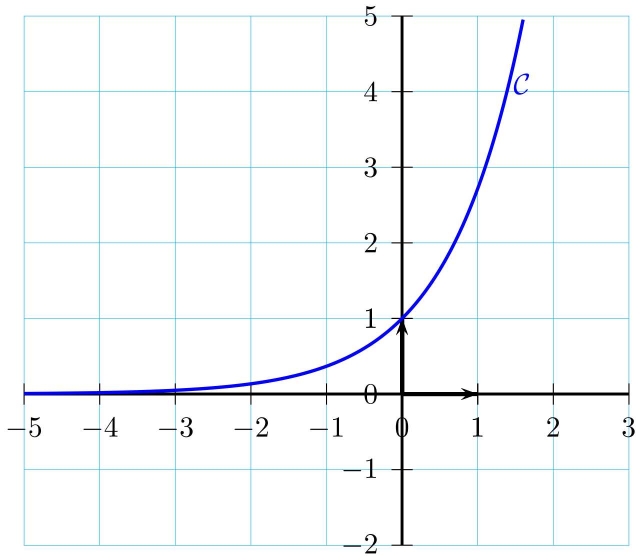
1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
2. Montrer que les courbes $\mathcal{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.
3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathcal{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ?
   Démontrer cette conjecture.

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0\,;\,1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

III **(5 points)** On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.
   Démontrer que la droite $\mathcal{D}_{\mathrm{e}}$, d'équation $y = \mathrm{e}x$, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.
2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$.
3. Démontrer cette conjecture.

IV **(6 points)**
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Proposition 1 : g est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par

$$g(x) = 2x\ln(2x+1).$$

Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.

Proposition 2 : Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g (définie dans la question précédente) au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

Proposition 3 : Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z - \overline{z} + 2 - 4\mathrm{i} = 0$$

admet une solution unique.

Proposition 4 : $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^7}\right) + \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^9\right)}{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln 2 + \ln 3}}{\mathrm{e}^{\ln 3 - \ln 4}}$

Proposition 5 : L'équation $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Proposition 6 : On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad \ln\left(u_{n+1}\right) = \ln\left(u_n\right) - 1.$$

La suite (u_n) est-elle géométrique ?

(V) **(Bonus)** Sans l'usage d ela calculatrice, comparez les réels $a = \mathrm{e}^{\pi}$ et $b = \pi^{\mathrm{e}}$.

(VI) Exercice 2 — 3 points

Commun à tous les candidats

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^{a}.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

(VII) Exercice 2 — 3 points

Commun à tous les candidats

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n.$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

   Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

(VIII) Exercice 3 — 3 points

Commun à tous les candidats

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } \ n, u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}.$$

1. a) À l'aide du calcul des premiers termes de la suite (u_n), conjecturer la forme explicite de u_n en fonction de n. Démontrer cette conjecture.

   b) En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite (u_n).

2. Compléter, dans l'annexe 2, l'algorithme permettant de déterminer la valeur du plus petit entier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 10^{-3}$.*