

Devoir de Mathématiques N° 9 (1h30) - Complexes.

I (8 points)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Proposition 1 : Les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -4i$ ne sont pas alignés.

Proposition 2 : Il n'existe pas d'entier naturel n non nul tel que $[i(1+i)]^{2n}$ soit un réel strictement positif.

Proposition 3 : L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z - 4| = |z + 2i|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe $3i$.

Proposition 4 : Soit (E) l'équation $(z - 1)(z^2 - 8z + 25) = 0$ où z appartient à l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

II (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.

Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

2. Soit A le point d'affixe $\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$.

Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

3. Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

III (8 points)

On définit, pour tout entier naturel n , les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 &= 16 \\ z_{n+1} &= \frac{1+i}{2}z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O , on considère les points A_n d'affixes z_n .

1. a) Calculer z_1, z_2 et z_3 .
 b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'**annexe, à rendre avec la copie**.
 c) Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
 d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .
2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

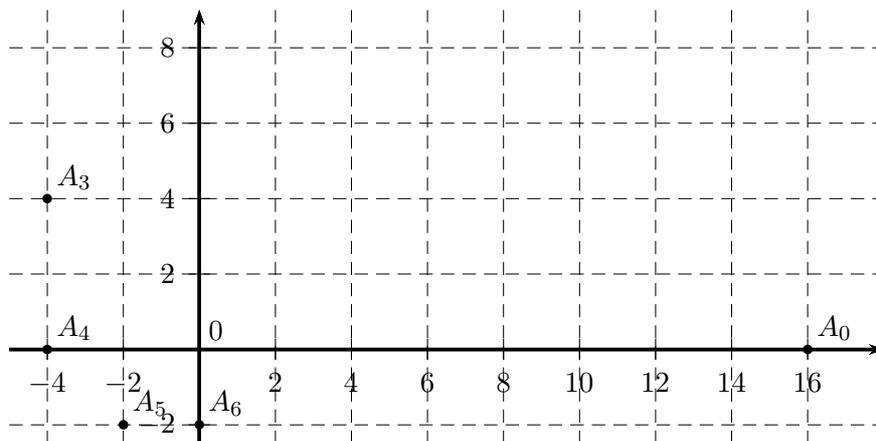
La suite (r_n) est-elle convergente ?

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

3. On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3 , etc.

$$\text{Ainsi } L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n.$$

- a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$.
- b) Donner une expression de L_n en fonction de n .
- c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n) .



IV (Bonus 2 points) Un résultat fondamental de mathématiques (théorème de D'Alembert) permet d'établir que tout polynôme de degré n à coefficients complexes admet n racines éventuellement multiples. On considère le polynôme $P(z) = z^5 - 1$.
 Combien P a-t-il de racines ? Lesquelles sont-elles ?