Devoir de Mathématiques N^o 8 (2h) - Complexes et exponentielle.

I **(8 points)** *Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.*

Partie A

On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est notée $\Re(z)$.

1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - \mathrm{i}$.
2. Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{i})$.
3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ,

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

Partie B

Dans cette partie, on admet que, pour tout réel θ, $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

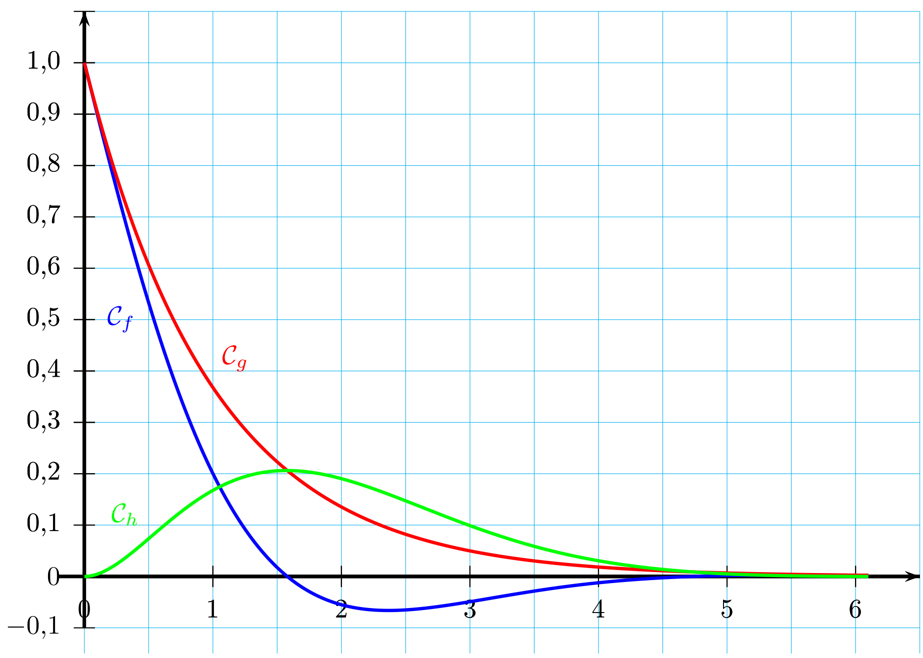
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.
Les représentations graphiques $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

1. Conjecturer :
   a) les limites des fonctions f et g en $+\infty$;
   b) la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$;
   c) la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est maximal.
2. Justifier que $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
4. a) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
   $h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.
   b) Justifier que,
   sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$,
   et que sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$.
   c) En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.
5. Montrer que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2 + \cos(x) - \sin(x)]$$

   est une primitive de la fonction h.



II **(3 points)** *Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4 + 6\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Affirmation 1 : L'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Affirmation 2 : L' algorithme suivant affiche en sortie la valeur 0,54.

Variables :	X et Y sont des réels
Initialisation :	X prend la valeur 0
	Y prend la valeur $\dfrac{3}{10}$
Traitement :	Tant que $Y < 0{,}5$
	X prend la valeur $X + 0{,}01$
	Y prend la valeur $\dfrac{3}{4 + 6\mathrm{e}^{-2X}}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

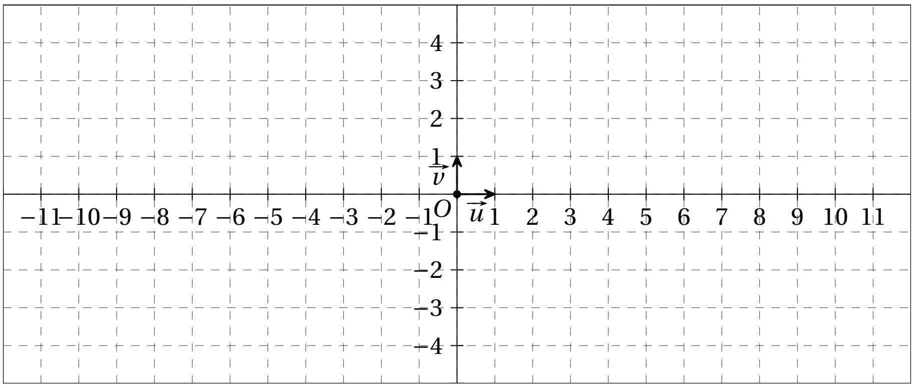
III **(2 points)** Dans le plan complexe $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ ci-dessous, représentez les ensembles suivants : *(on ne demande pas de justification mais il faut laisser les traits de construction apparents).*

$\mathscr{E}_1$ est l'ensemble des points $M(z)$ satisfaisant : $\arg(z) = \dfrac{-\pi}{3} \quad (2\pi)$

$\mathscr{E}_2$ est l'ensemble des points $M(z)$ satisfaisant : $\arg(z - 2\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4} \quad (\pi)$

$\mathscr{E}_3$ est l'ensemble des points $M(z)$ satisfaisant : $|z - 3 + \mathrm{i}| = 4$

$\mathscr{E}_4$ est l'ensemble des points $M(z)$ satisfaisant : $|z + 3\mathrm{i}| = |z + 3|$



IV **(5 points)** On définit pour tout nombre complexe $z \neq \mathrm{i}$ le nombre $Z = \dfrac{z+3}{z-\mathrm{i}}$.
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z est imaginaire pur, $\mathscr{F}$ celui des points $M(z)$ tels que Z est réel et enfin $\mathscr{H}$ celui des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$.

1. a) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;1)\}$. Déterminer la forme algébrique de Z. Vous montrerez en particulier que
$$\Re(Z) = \frac{x^2 + 3x + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2};$$
   b) En déduire la nature et les éléments caracteristiques de l'ensemble $\mathscr{E}$.
2. De même, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\mathscr{F}$.
3. Par des considérations d'ordre géométrique, déterminer $\mathscr{H}$.

V **(2 points)** On donne $z = -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \mathrm{i}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

1. Déterminer la forme algébrique de z^2.
2. En déduire la forme exponentielle de z^2.
3. **En bonus :** En déduire alors le module et un argument de z.
4. **En bonus :** En déduire alors les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$