Devoir de Mathématiques N^o 6 (2h)

I (5 points)

1. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
   a) Etudier g et dresser son tableau de variations.
   b) Montrer que g admet une unique racine réelle α. En donner un encadrement d'amplitude 10^{-3}.
   c) Dresser le tableau de signe de g.
2. Soit f définie sur $D =]1; +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$$
   a) Calculer les limites de f aux bornes de D.
   b) Déterminer la fonction dérivée f' de f et établir que f' et g ont le même signe sur D.
   c) En déduire le tableau de variations de f.
   d) Etablir que
$$f(\alpha) = \frac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}$$

II (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} &= \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right) u_n. \end{cases}$$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)u_n$.

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,250 00	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

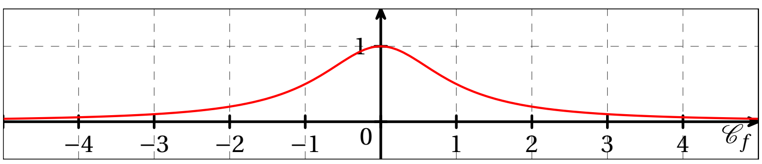
1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n), arrondies au cent-millième.
   Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?
2. a) Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.
   b) Démontrer cette conjecture.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

III (2 points)

On rappelle que la fonction partie entière de x est définie sur $\mathbb{R}$ comme la fonction qui à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x noté $E(x)$.

Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $g(x) = E(f(x))$. Sur le graphique suivant est représenté la courbe C_f de la fonction f.

1. Représenter la courbe C_g sur graphique.
2. Justifier que g est nulle sur $\mathbb{R}^\star$.
3. La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$? (justifier).



IV **(4 points)**
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \dfrac{1}{(x^2+3x)^4}$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$f_2(x) = \sin\left(\dfrac{1-x}{x^2+1}\right)$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$f_3(x) = \sqrt{\sqrt{3x^2+1}}$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

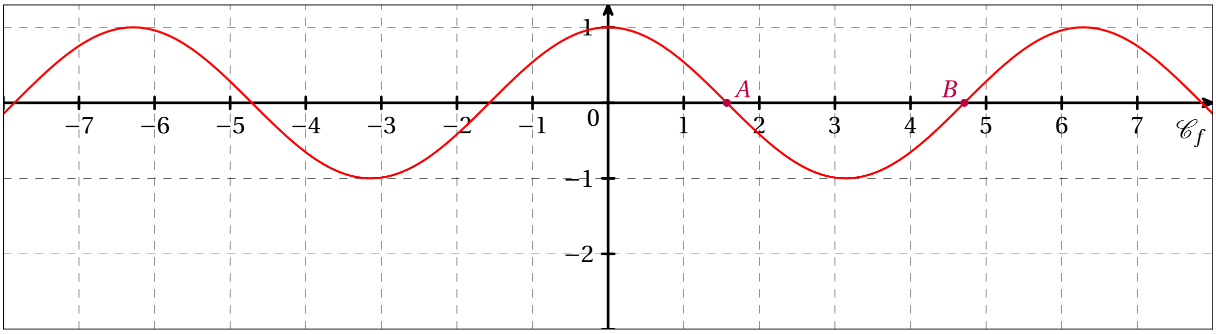
$f_4(x) = \sqrt{\dfrac{5}{(x^2+9)}}$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

V **(2 points)**
Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+3} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{pour } x \leq 1 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en 1 ? Dérivable en 1 ? Donner une interprétation géométrique.

VI **(2 points)** On considère la fonction $f(x) = \cos x$ dont le graphe est représenté ci-dessous. On note A et B les deux premiers points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses (voir figure). Et T_A, T_B les tangentes en ces points.



1. Tracer les droites T_A et T_B et emmètre une conjecture.
2. Déterminer les abscisses de A et B ainsi que les équations de T_A et T_B.
3. Les droites T_A et T_B sont-elle perpendiculaires ?

VII **(2 points)**

1. Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants :

$z_1 = \dfrac{2-4\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$

$z_2 = \mathrm{i}(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$,

(E_1) : $5\mathrm{i} - z = 3\mathrm{i}z + 1$

(E_2) : $\overline{z} + \mathrm{i}z = 1$.

VIII **(∗) Bonus (1 point)** Montrer que si f dérivable en a alors f continue en a.

IX **(∗∗) Bonus (1 point)** Soit F une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
On sait que $F'(x) = f(x)$ et $F(0) = 0$.
On pose $\varphi(x) = F(x) + F(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Déterminer $\varphi'(x)$ et montrer que φ est une fonction constante que l'on déterminera. Que pouvez-vous en déduire pour F ?

X **(∗∗∗) Bonus (1 point)**

1. Démontrer la règle de l'Hôpital dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 1. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et $a \in I$. On suppose $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$. On a alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

2. Soit f définie sur $\left]\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}{\sin x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$