Devoir de Mathématiques N^o 3

0 Nom et prénom :

1 **(3 points)**
Déterminez la limite des suites suivantes dans le cas ou elle existe.

$u_n = \dfrac{4^n}{3^n - 5^n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$.

$v_n = \sin(3n^2) - n$, $n \in \mathbb{N}^\star$.

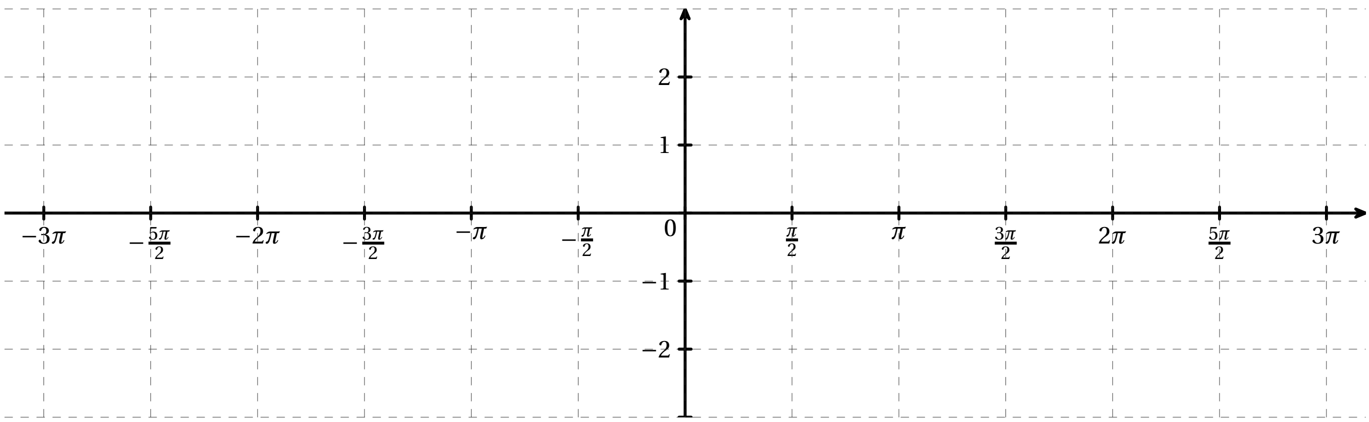
2 **(3 points)**
Déterminer la limite de la fonction f à l'endroit indiqué.

$f_1(x) = \dfrac{4-x}{x^2-1}$ en -1.

$f_2(x) = \dfrac{3x^3 - x^2}{x^3 - 3}$ en $-\infty$.

3 **(3 points)**
Soit $f(x) = \sin^3 x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est impaire et 2π-périodique. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f ?
2. Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau variations de f sur I en y précisant bien les valeurs de $f'(x)$ aux bornes de I.
3. Tracer la courbe représentative de f de manière sommaire sur le graphe ci-joint.



4 (11 points)

Les 3 questions de cet exercice sont indépendantes.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en annexe (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

   b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. a) Etudier la fonction f sur $]-2; +\infty[$.

   b) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n > u_{n+1} > 1$.

   c) Montrer que la suite (u_n) converge.

3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

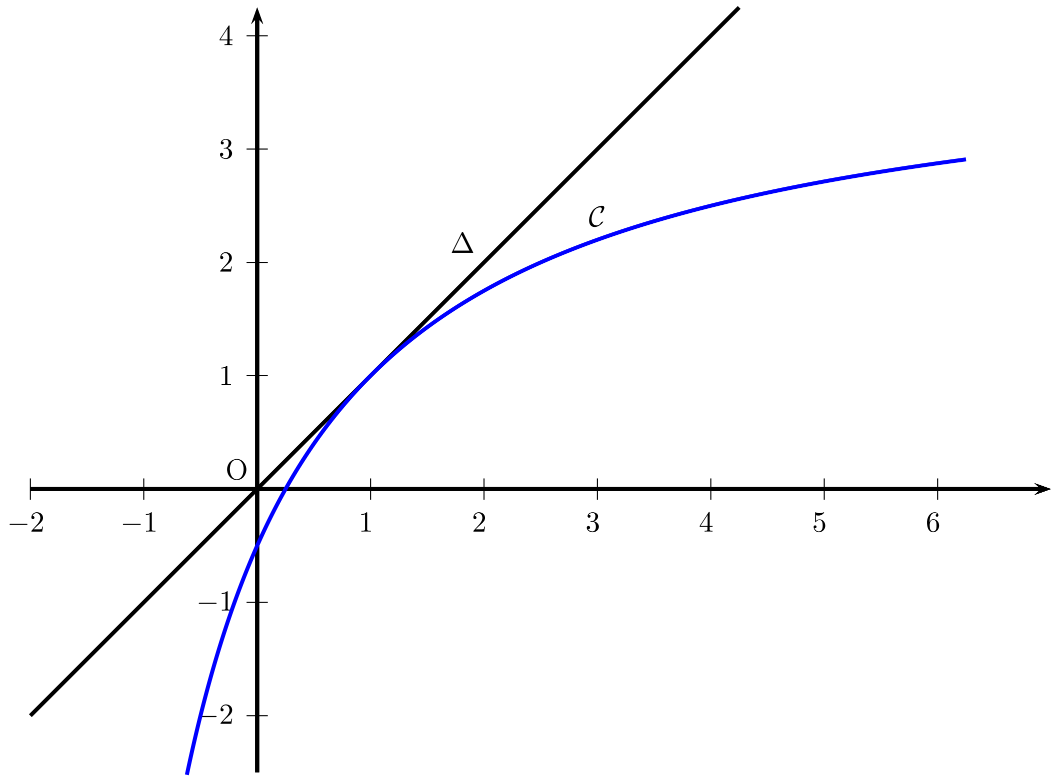
   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

   b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   c) En déduire la limite de la suite (u_n).

4. Pouvez-vous déterminer une valeur de u_0 pour que la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ soit une suite croissante. Justifier sommairement.



5 Bonus (2 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sin a \neq 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a

$$\cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin a}{2^n \cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)}$$