BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

27 février 2018

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 7

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les cinq exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Proposition 1 : On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a < b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$
TRAITEMENT	Lire a et b Tant que $b - a > 0{,}3$ x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Si $f(x)f(a) > 0$, alors a prend la valeur x sinon b prend la valeur x Fin Si Fin Tant que Afficher $\dfrac{a+b}{2}$

Affirmation : Si l'on entre $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre $1{,}687\,5$.

Proposition 2 : Soit $z_1 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Affirmation : La forme exponentielle de $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2}$ est $\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$.

Proposition 3 : Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose :

$$Z = \frac{\mathrm{i}z}{z-2}.$$

Affirmation : L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point $\mathrm{A}(1\,;\,0)$.

Proposition 4 : A et B sont deux évènements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient :

$$p(A) = 0{,}4, \quad p_A(B) = 0{,}7 \quad \text{et} \quad p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0{,}1.$$

Affirmation :

La probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est égale à $\dfrac{14}{41}$.

Exercice 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
   On envisage les événements suivants :
   - H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
   - H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
   - H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
   - C : « l'arbre choisi est un conifère »,
   - F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

   a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

   b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

   c) Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.

   d) L'arbre choisi est un conifère.
   Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
   On arrondira à 10^{-3}.

   c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
   On arrondira à 10^{-3}.

Exercice 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire que si $x \geqslant \text{e}$ alors $f(x) \geqslant \text{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.

   Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant \text{e}$.

   b) Déterminer les variations de la suite (u_n).

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   d) Soit ℓ la limite de (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$, déterminer ℓ.

Exercice 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M' est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

   En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.
   On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
   Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.
   a) Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.
   b) Sur la figure donnée en annexe page 7, on a représenté un point M sur le cercle $\mathcal{C}$.
   Construire sur cette figure les points N et M' en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).
   c) Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM' ?

Exercice 5 (3 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

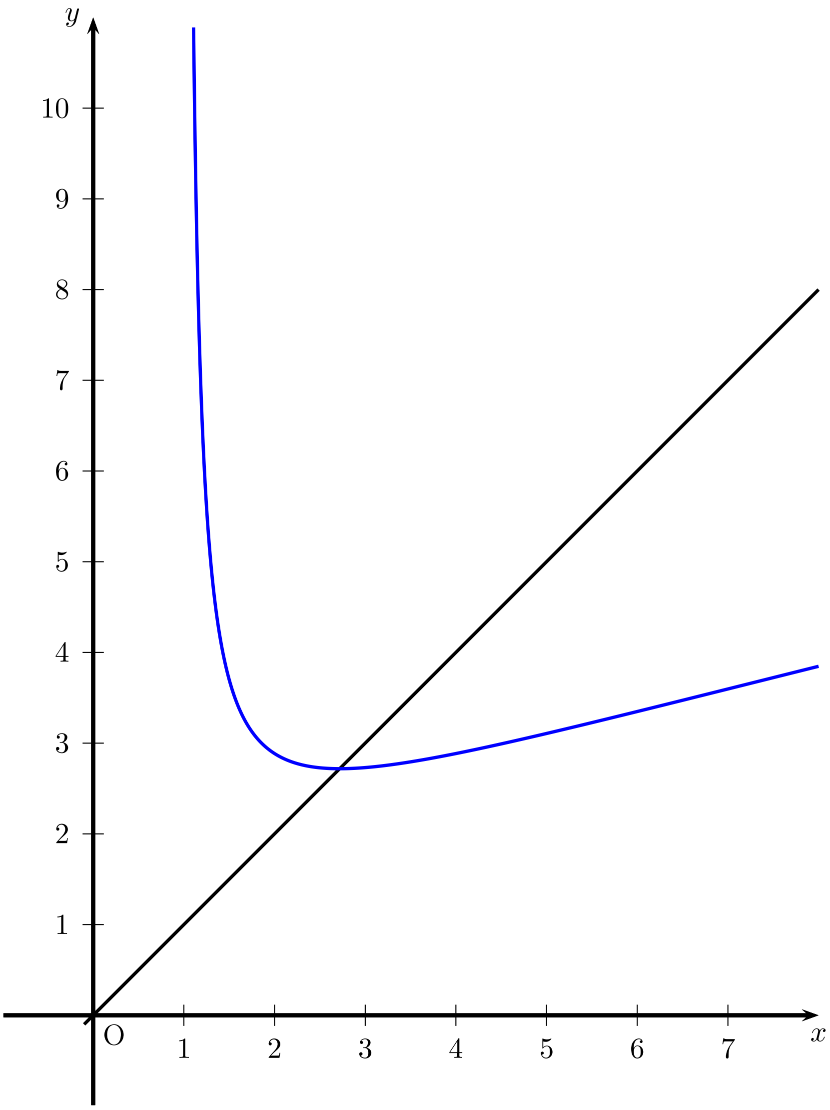
$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^a.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

ANNEXE

Exercice 3

À rendre avec la copie



ANNEXE

Exercice 4

À rendre avec la copie