

Devoir de Mathématiques N° 8 (1 h)

1 Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

1. a) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j , puis donner sa forme exponentielle.

3. Démontrer les égalités suivantes :

a) $j^3 = 1$;

b) $j^2 = -1 - j$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.

Quelle est la nature du triangle PQR? Justifier la réponse.

2 On définit, pour tout entier naturel n , les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 &= 16 \\ z_{n+1} &= \frac{1+i}{2}z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n .

1. a) Calculer z_1, z_2 et z_3 .

b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'**annexe, à rendre avec la copie**.

c) Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.

d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La suite (r_n) est-elle convergente?

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3 , etc.

Ainsi $L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$.

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$.

b) Donner une expression de L_n en fonction de n .

c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n) .

