Devoir de Mathématiques N^o 14 (1h)

1 Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que $\mathcal{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

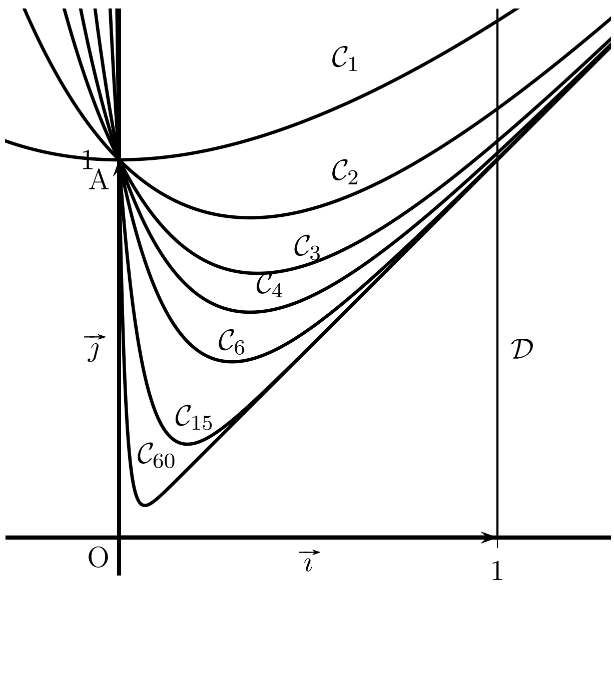
L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x.$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.



a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

b) En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x} \left(1 - \mathrm{e}^{x}\right) \, \mathrm{d}x.$$

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).

2 On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.