Devoir de Mathématiques N^o 12 (1h)

1 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

La courbe $(\mathcal{C})$, donnée en annexe, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

La courbe $(\mathcal{C})$ passe par les points O et $\text{A}\left(1\,;\,\dfrac{1}{2\text{e}}\right)$ et, sur $[0\,; 1]$, elle est au dessus du segment [OA].

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\text{e}}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4\text{e}}$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

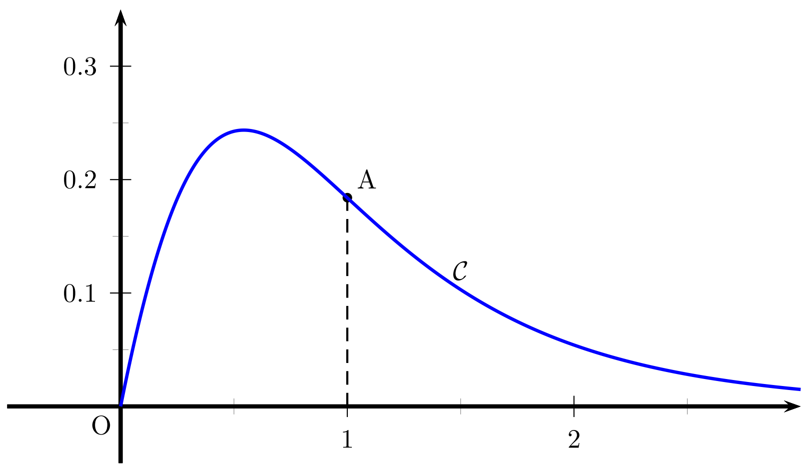
$$f(x) = \frac{x\text{e}^{-x}}{x^2+1}.$$

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\text{e}^{-n} - \text{e}^{-2n}\right)$.
3. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

ANNEXE

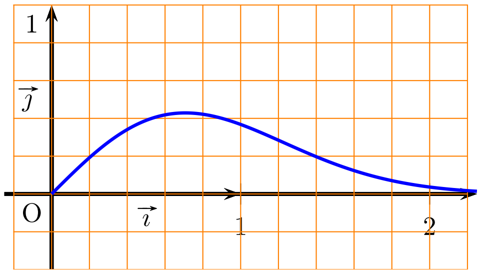


2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$).

   $\boxed{\text{On admet que } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$

   b) Démontrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.
   Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

   b) Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$?

   c) Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. a) Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

   b) **Seulement si vous aves le temps. Hors barême ! ! !**

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

   Interpréter ces résultats.