BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

23 février 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 7

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 2 points

Commun à tous les candidats

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;

— la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.
On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

1. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1{,}989 \times 10^{-3}$.
3. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.
   Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.
On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n$$

On note A_n le point d'affixe z_n.

1. a) Donner la forme exponentielle de $\dfrac{3}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $z_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$.

   c) Dans le repère orthonormé direct donné en annexe placer les points A_0, A_1 et A_2.
   (*Vous laisserez apparents les traits de construction).*

   d) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

   a) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$,

   $$z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$$

   b) Déterminer la nature de la suite (d_n), et en déduire une expression de d_n en fonction de n.

   c) Donner une interprétation géométrique des nombres d_n.
3. On pose $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.
   ℓ_n est la longueur de la ligne polygonale de sommets successifs A_0, A_1, A_2, $\cdots$ A_n.
   Déterminer ℓ_n en fonction de n, puis la limite de ℓ_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité
Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0{,}01$; $x = 0{,}02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0{,}99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.
Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée
$0{,}2^2 = 0{,}04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2} \approx 0{,}45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

   a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

   b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.
   Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (\mathrm{e} - 1)x].$$

   On admet que f_2 est une fonction de retouche.
   On définit sur l'intervalle $[0 ; 1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

   a) Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$: $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e} - 2) - (\mathrm{e} - 1)x}{1 + (\mathrm{e} - 1)x}$;

   b) Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e} - 2}{\mathrm{e} - 1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

   c) Établir que l'équation $g(x) = 0{,}05$ admet sur l'intervalle $[0 ; 1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.
   On admettra que : $0{,}08 < \alpha < 0{,}09$ et que : $0{,}85 < \beta < 0{,}86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.
   Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale) y (nuance retouchée) E (écart) c (compteur) k
Initialisation :	c prend la valeur 0

Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire
	    x prend la valeur $\frac{k}{100}$
	    y prend la valeur $f(x)$
	    E prend la valeur $\lvert y-x\rvert$
	        Si $E \geqslant 0{,}05$, faire
	          c prend la valeur $c+1$
	        Fin si
	Fin pour

Sortie :	Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

Exercice 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier
	U,V,W sont des réels
	K est un entier
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	Affecter $K + 1$ à K
	Affecter U à W
	Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B

1. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

   b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

   Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2. a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   b) Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

   c) En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

   En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$.

Exercice 5 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

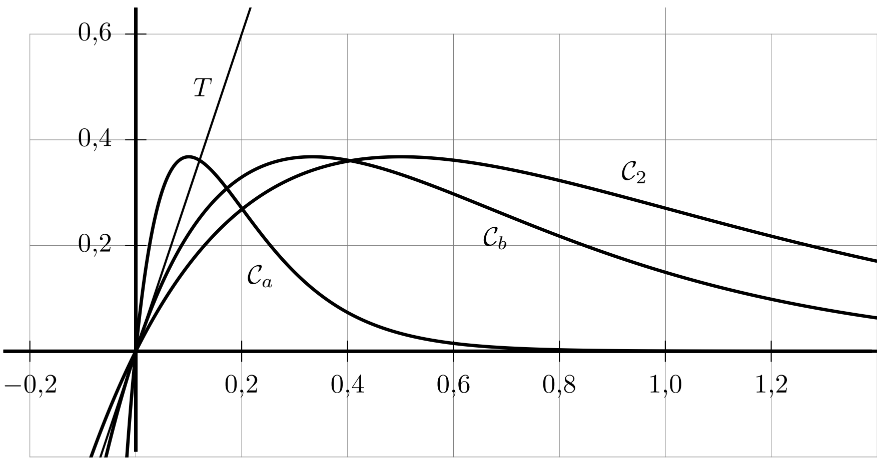
On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par un même point.
2. a) Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1 - kx)\mathrm{e}^{-kx}.$$

   b) Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

   c) En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

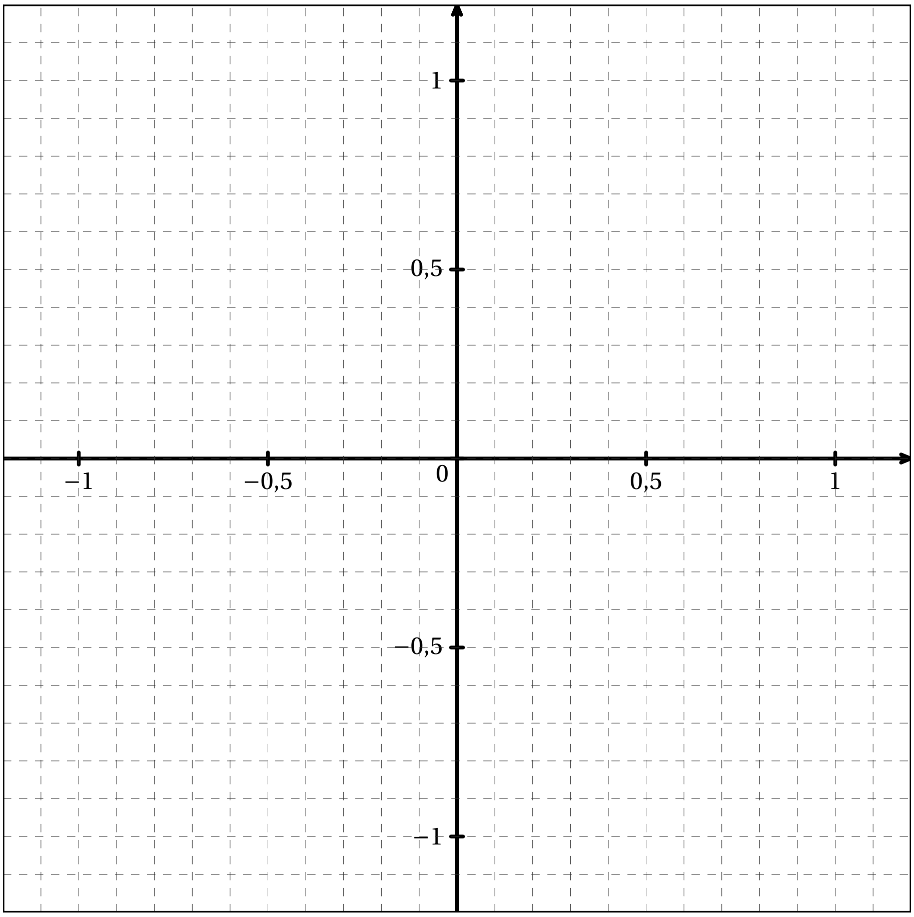
   d) Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O origine du repère.

   e) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.

A RENDRE AVEC LA COPIE

NOM : .... PRENOM : .... Classe : ....

Annexe relative à l'exercice 2



Annexe relative à l'exercice 3
Courbe représentative de la fonction f_1