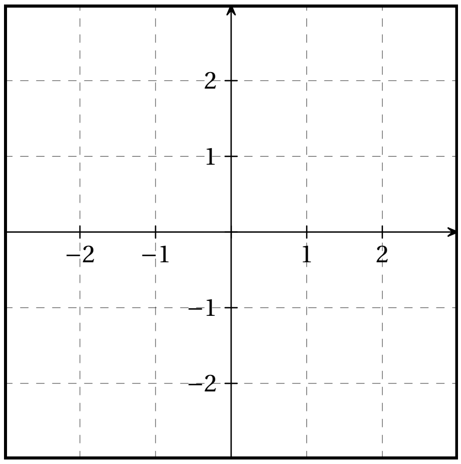
Devoir de Mathématiques N^o 6 (1 h)

1 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\,\vec{v})$.
On note i le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$ et le point B d'affixe $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}$.
À tout point M d'affixe $z_M = x + \mathrm{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -\mathrm{i}z_M$.
On désigne par I le milieu du segment $[\mathrm{A}M]$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane $(\mathrm{O}I)$ du triangle $\mathrm{OA}M$ est aussi une hauteur du triangle $\mathrm{OB}M'$ (propriété 1) et que $\mathrm{B}M' = 2\mathrm{O}I$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   a) Déterminer la forme algébrique de z_M.
   b) Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
   c) Placer les points A, B, M,M' et I dans le repère $(O\,;\vec{u},\,\vec{v})$ ci-contre.
   Tracer la droite $(\mathrm{O}I)$ et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.



2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$.
   a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
   b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.
   c) Écrire les coordonnées des points I, B et M'.
   d) Montrer que la droite $(\mathrm{O}I)$ est une hauteur du triangle $\mathrm{OB}M'$.
   e) Montrer que $\mathrm{B}M' = 2\mathrm{O}I$.

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pr $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$. On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique. Soit A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 et B celui d'abscisse -1. On note T_A et T_B les tangentes à $\mathscr{C}$ correspondantes.

1. Etudier les limites de f.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que les tangentes T_A et T_B sont perpendiculaires.

3 On souhaite programmer un algorithme de recherche de racine d'une fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ par dichotomie. On suppose que f n'a qu'une seule racine sur cet intervalle. On donne les 3 algorithmes suivants.

Algorithme 1:

Traitement
  $p \leftarrow 5$;
  tant que $b - a > 10^{-p}$ **faire**
    $c \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$;
    si $f(a)f(c) < 0$ **alors**
      $b \leftarrow c$;
    sinon
      $a \leftarrow c$;
  Afficher : $a; b$

Algorithme 2:

Traitement
  $p \leftarrow 5$;
  tant que $b - a < 10^{-p}$ **faire**
    $c \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$;
    si $f(a)f(c) < 0$ **alors**
      $b \leftarrow c$;
    sinon
      $a \leftarrow c$;
  Afficher : $a; b$

Algorithme 3:

Traitement
  $p \leftarrow 5$;
  tant que $b - a > 10^{-p}$ **faire**
    $c \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$;
    si $f(a)f(c) > 0$ **alors**
      $b \leftarrow c$;
    sinon
      $a \leftarrow c$;
  Afficher : $a; b$

1. Un seul de ces algorithmes est correct. Lequel ? Vous justifierez sommairement votre réponse.
2. A quoi correspond p ?