

Devoir de Mathématiques N° 3 (2 h)

1 _____ (6 points)

Déterminer la limite de chacune des fonctions dans l'endroit indiqué.

$$f_1(x) = \frac{x-4}{x^2+3x+2} \text{ en } -2^-.$$

$$f_2(x) = x^3 - x^2\sqrt{x}; \text{ en } +\infty.$$

$$f_3(x) = (-3x^2 + 5x - 11)^{111}; \text{ en } +\infty$$

$$f_4(x) = \frac{x^5 + 4x^2 + 3\pi}{5 - x^2}; \text{ en } -\infty.$$

$$f_5(x) = \frac{\sin((x-1)^2)}{x-1}; \text{ en } 1$$

$$f_6(x) = \frac{\cos(3x) + x}{x+2}; \text{ en } -\infty$$

2 _____ (2 points)

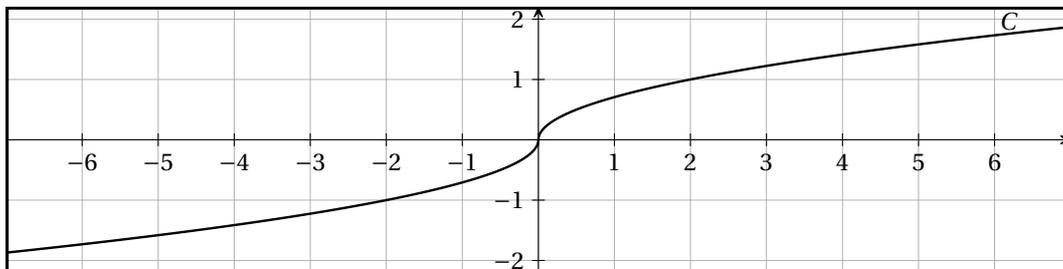
Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x E(x)$ où $E(x)$ est la partie entière de x .

(On rappelle que $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x)

1. f est-elle continue en 0? (justifiez)
2. f est-elle continue en 1? (justifiez)

3 _____ (1 point)

On considère la fonction f dont la représentation graphique figure ci-dessous. Soit E la fonction partie entière. Représenter graphiquement la fonction $E(f)$ de manière sommaire sur le graphique suivant. On ne demande aucune justification.



4 _____ (2 points)

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \frac{2x-1}{3x+1} & \text{pour } x \leq 1 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en 1?

5 _____ (2 points)

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 3$

1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f , étudiez son signe et dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

2. Montrer que f admet une unique racine α dans l'intervalle $[0; 3]$ et en déterminer une valeur approchée à 10^{-2} .

6 _____ (7 points)

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

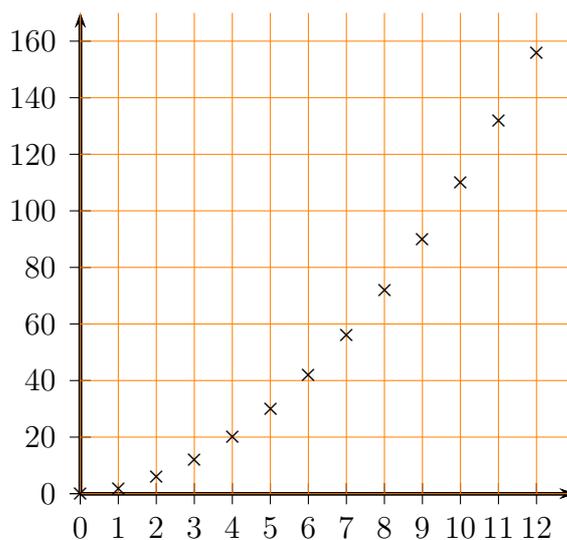
- Calculer u_1 et u_2 .
- On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	Algorithme 2
Variation : n est un entier naturel u est un réel	Variation : n est un entier naturel u est un réel
Entrée : Saisir la valeur de n	Entrée : Saisir la valeur de n
Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n - 1$: u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie : Afficher u	Sortie : Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n , la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

- À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



- Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.
 - La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n , $u_n = an^2 + bn + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.
4. On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
- Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
 - On définit, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = (n + 1)(n + 2)$.
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n .