Devoir de Mathématiques N^o 2 (1 h 15mn)

1 Déterminez les limites des suites suivantes dans le cas ou elle converge.

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{n^2}{3}\right)}{n},\ n \in \mathbb{N}^\star.$$

$$v_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

$$w_n = 3n^3 - 2n^2 + 2,\ n \in \mathbb{N}.$$

2 Déterminer la limite de la fonction f à l'endroit indiqué.

$$f_1(x) = \frac{4 - x}{x^2 + x - 2} \text{ en } -2.$$

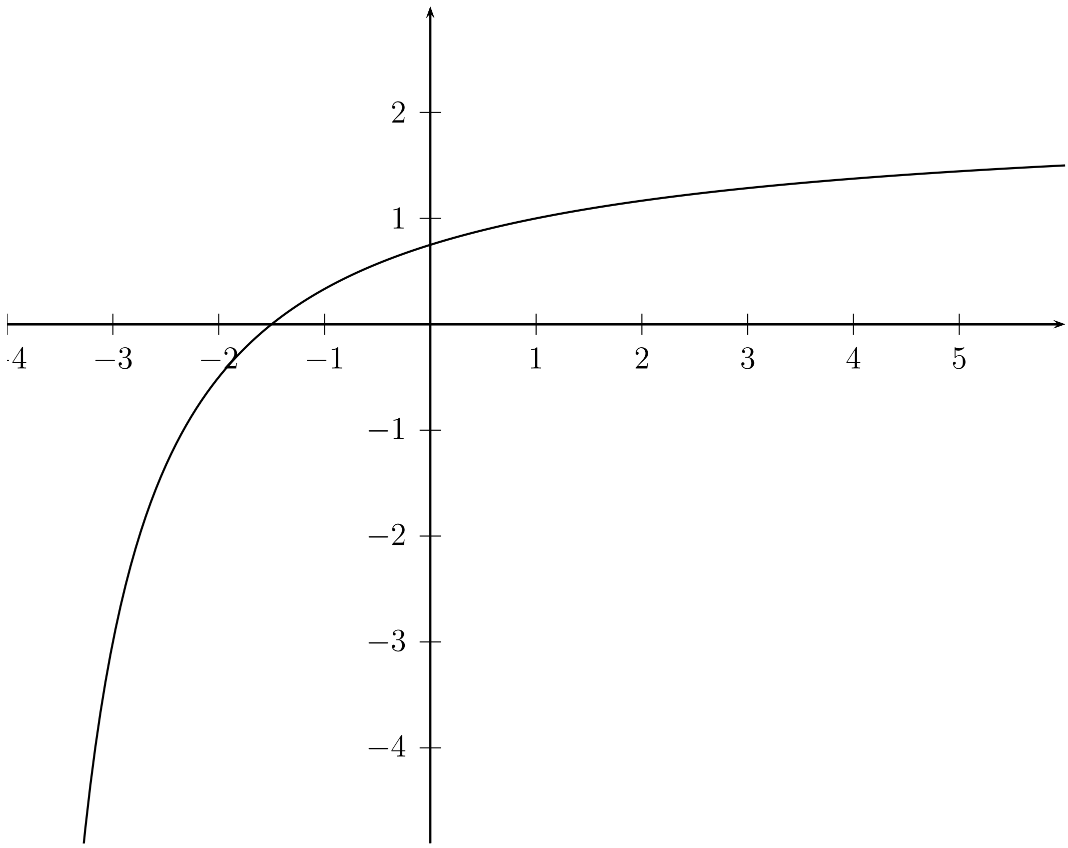
$$f_2(x) = \frac{3x^3 - x^2}{x^2 - 3} \text{ en } -\infty.$$

3 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur $]-4\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.

1. Représenter les premiers termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses. Puis faire une conjecture quant à l'éventuelle limite de la suite (u_n).
2. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par :
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$
Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).



6. On définit $(w_n)_{n\geq 0}$ par :
$$\begin{cases} w_0 = 5 \\ w_{n+1} = f(w_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
   a) A l'aide du graphe de f, que pouvez-vous conjecturer sur le sens de variation de (w_n) et la convergence de (w_n) ?
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1 \leq w_{n+1} \leq w_n$.
   c) Conclure sur la convergence de la suite (w_n).