# Devoir Mathématiques $N^o$ 13 (2h)

**1** *Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.*

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à $10^{-4}$.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

## PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :
- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note $V$ l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et $T$ l'évènement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de $V$ et $T$.

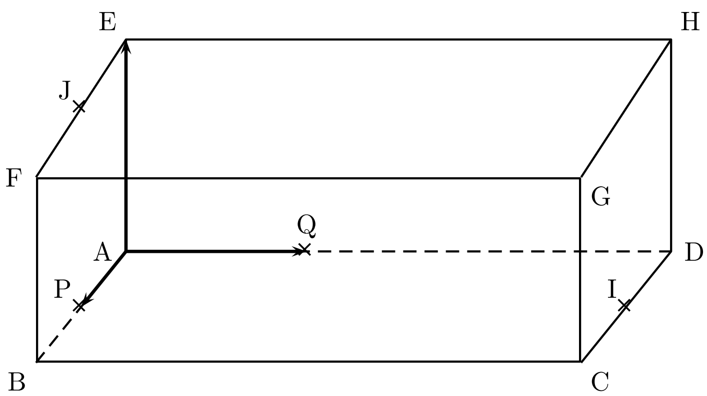
1. a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V), P_V(T), P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.
3. a) Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
   b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

## PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

**2** Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].
On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.




On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur $(P_1)$ du segment [AB].
3. Soit $(P_2)$ le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.
   Montrer que le plan $(P_2)$ est le plan médiateur du segment [IJ].

4. a) Démontrer que les plans $(P_1)$ et $(P_2)$ sont sécants.
   b) Montrer que leur intersection est une droite $(\Delta)$ dont une représentation paramétrique est

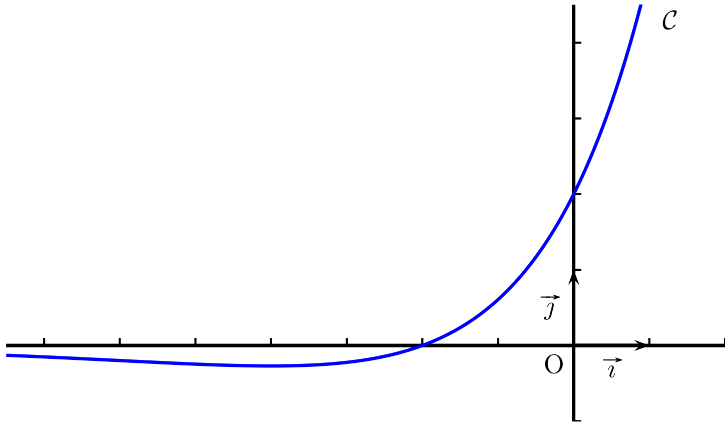
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1 \\ y &=& t \\ z &=& 3t-4 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des nombres réels } \mathbb{R}.$$

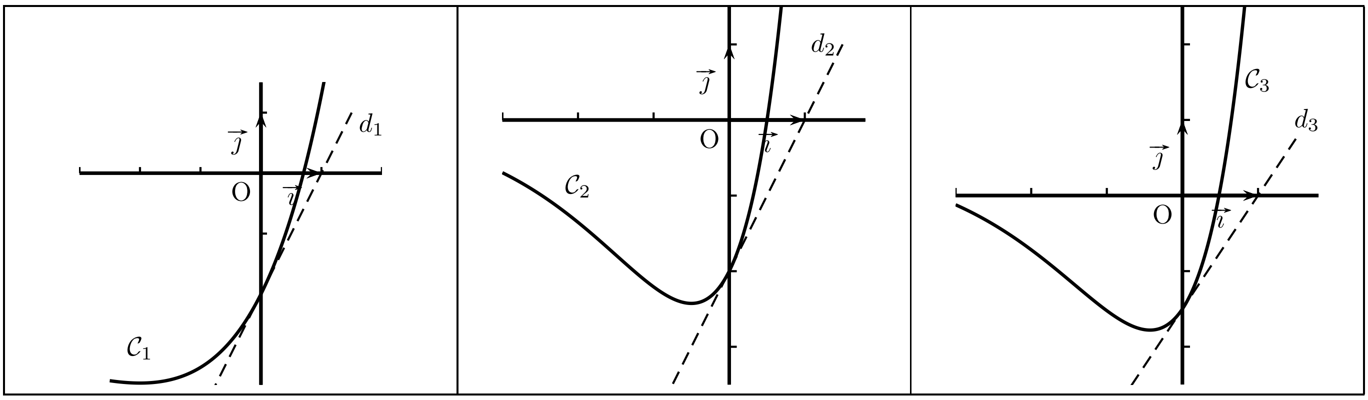
   c) Déterminer les coordonnées du point $\Omega$ de la droite $(\Delta)$ tel que $\Omega\text{A} = \Omega\text{I}$.
   d) Montrer que le point $\Omega$ est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.

**3** Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**Partie A**

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et trois autres courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.




1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x$.
2. On désigne par $F$ une primitive de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
   a) À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
   b) L'une des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction $F$.
   Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

**Partie B**

Dans cette partie, on admet que la fonction $f$ évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe $\mathcal{C}$ permet de conjecturer que la fonction $f$ admet un minimum.
   a) Démontrer que pour tout réel $x$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
   b) En déduire une validation de la conjecture précédente.
2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Interpréter géométriquement le réel $I$.

b) Soient $u$ et $v$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
Vérifier que $f = 2\,(u'v + uv')$.

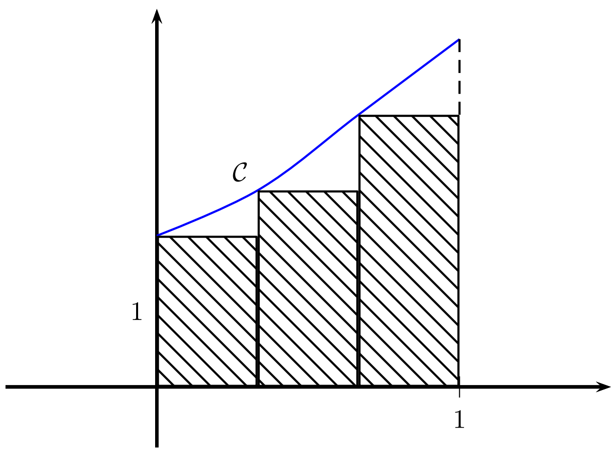
c) En déduire la valeur exacte de l'intégrale $I$.

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

| | |
|---|---|
| Variables : | $k$ et $n$ sont des nombres entiers naturels. |
| | $s$ est un nombre réel. |
| Entrée : | Demander à l'utilisateur la valeur de $n$. |
| Initialisation : | Affecter à $s$ la valeur 0. |
| Traitement : | Pour $k$ allant de 0 à $n-1$ |
| | \| Affecter à $s$ la valeur $s + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. |
| | Fin de boucle. |
| Sortie : | Afficher $s$. |

On note $s_n$ le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de $n$.

a) Justifier que $s_3$ représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.




b) Que dire de la valeur de $s_n$ fournie par l'algorithme proposé lorsque $n$ devient grand ?