BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Semaine du 10 mars 2014

MATHÉMATIQUES

OBLIGATOIRE

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 5

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats Pour chaque question, une proposition est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit f la fonction numérique de variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{pour } x \in]-\infty; 1] \\ 3x+2 & \text{pour } x \in]1; 10] \end{cases}$$

   Proposition 1 : La fonction f est continue sur $]-\infty; 10]$.

2. La fonction f étant la même que la fonction de la question précédente.
   Proposition 2 : La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 10]$.
3. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - \mathrm{i}| = |z + 2\mathrm{i}|$.
   Proposition 3 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.
4. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[A\,;\,+\infty[$ où A est un réel strictement positif.
   Proposition 4 : « Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$ ».
5. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0\,;\,3]$.
   Proposition 5 : Si $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^3 g(t)\,\mathrm{d}t$, alors pour tout nombre réel x appartenant à $[0\,;\,3]$: $f(x) \leqslant g(x)$.
6. On considère les points A, B et C d'affixes respectives -2, $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Proposition 6 : ABC est un triangle équilateral.
7. A tout nombre complexe z différent de $-\mathrm{i}$ on associe le nombre complexe $Z = \dfrac{z - 2 + \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$
   Proposition 7 : Si Z est imaginaire pur alors le point M d'affixe z appartient au cercle de centre $1 - \mathrm{i}$ et de rayon 1.

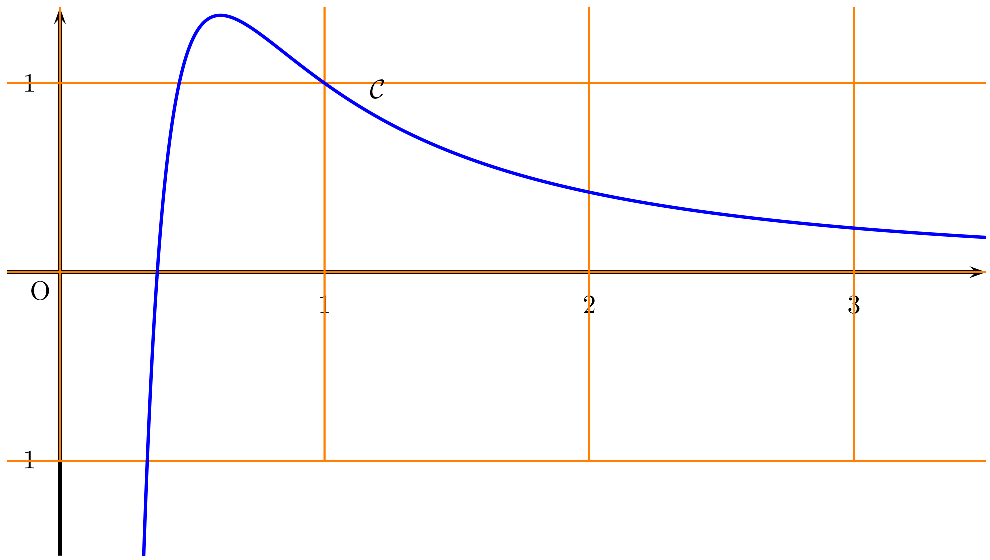
Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



1. a) Étudier la limite de f en 0.

   b) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,

   $$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   b) Résoudre sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{\text{e}}$ et $x = n$.

   a) Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \text{e} - \frac{1}{2}$.

   On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $F(x) = \frac{-2-\ln(x)}{x}$,est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   b) Calculer I_n en fonction de n.

   c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6 - v_n} \end{array}\right.$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

   Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

   La suite (v_n) est-elle monotone ?

   c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.
2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : A et B des nombres réels
            K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
                 Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
    Affecter à A la valeur (A + √(A² + B²))/3
    Affecter à B la valeur B/3
FinPour
Afficher A
```

   a) On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

   b) Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).
3. a) On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

   Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}| \leqslant \frac{2\,|z_n|}{3}.$$

   b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

   En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

   c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.