Devoir Mathématiques N^o 8 (1h)

1

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

   Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
   Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2. Donner la valeur exacte $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

2 On considère l'équation (E) suivante : $z^2 + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) z + 1 = 0$

1. Résoudre (E)
2. Donner les solutions sous forme exponentielle.

3 On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. Montrer qu'il existe 3 réels a,b,c que l'on déterminera tels que $P(z) = (z^2+3)(az^2+bz+c)$.
2. En déduire les 4 racines complexes de P.
3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \text{i}\sqrt{3}$, $z_{\text{B}} = -\,\text{i}\sqrt{3}$, $z_{\text{C}} = 3 + 2\text{i}\sqrt{3}$ et $z_{\text{D}} = \overline{z_{\text{C}}}$.
4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Déterminer l'affixe de E.
5. Montrer que
$$\frac{z_{\text{C}} - z_{\text{B}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{B}}} = \text{e}^{\frac{-\,\text{i}\pi}{3}}$$
6. En déduire la nature du triangle BEC.
7. **La question Joker :** Montrer que les quatre points A,B,C,D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Annexe de l'exercice 3 :