

Devoir Mathématiques N° 7 (1h)

1 Ecrivez sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned} a &= -5 + 5i \\ b &= (\sqrt{3} - 3i)^4 \\ c &= -ie^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

2 Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$a = 2 + 3i\sqrt{3}, \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{3}i, \quad c = -4 - 3i\sqrt{3}, \quad d = -2 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

1. Placer les points A, B, C et D sur une figure.
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Démontrer que $\frac{d-b}{c-a}$ est un imaginaire pur.
4. En déduire la nature du parallélogramme $ABCD$.

3 On définit pour tout nombre complexe $z \neq i$ le nombre $Z = \frac{z+3}{z-i}$.

Soit \mathcal{E} l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z est imaginaire pur, \mathcal{F} celui des points $M(z)$ tels que Z est réel et enfin \mathcal{H} celui des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$.

Partie A :

1. On pose $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 1)\}$. Déterminer la forme algébrique de Z . Vous montrerez en particulier que

$$\Re(Z) = \frac{x^2 + 3x + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2};$$

2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble \mathcal{E} .
3. De même, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de \mathcal{F} .

Partie B :

1. Par des considérations d'ordre géométrique, déterminer \mathcal{H} .

Annexe de l'exercice 2 :

