Devoir Mathématiques N^o 6 (1h30)

1 On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
   b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.
   c) En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1.$$

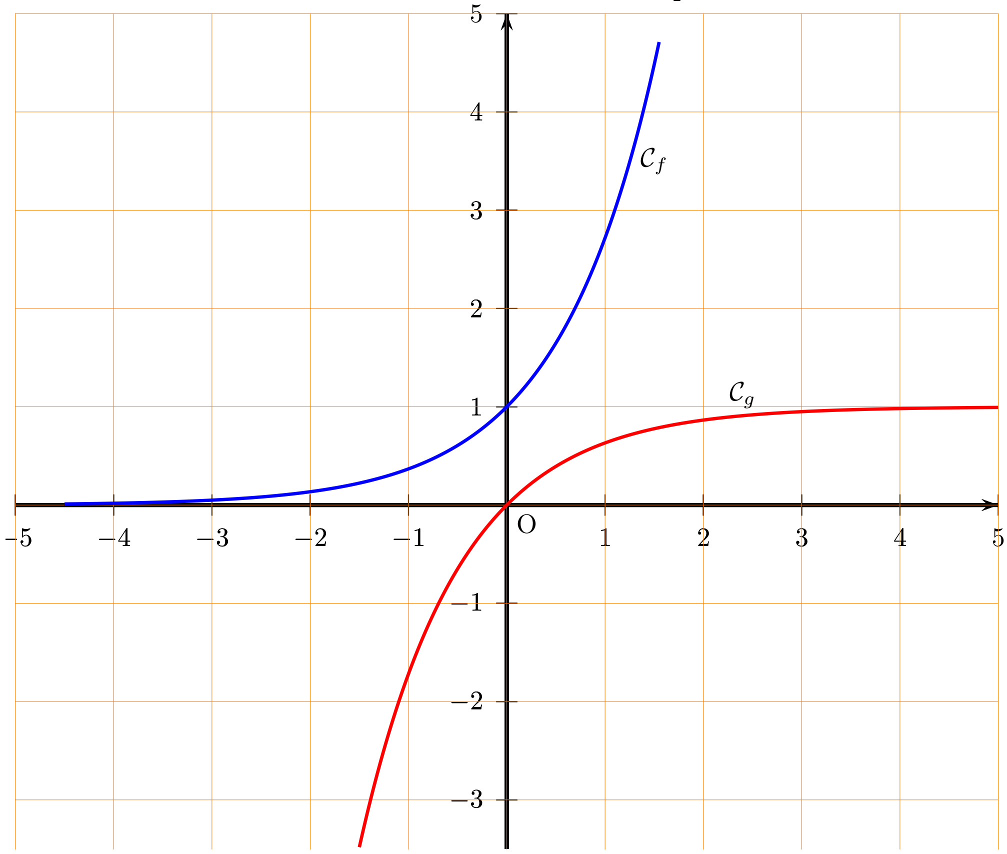
1. a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
   À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.
On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E.
2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.

Annexe à rendre avec la copie



2 Ecrire sous forme algébrique :

1. $Z_1 = \dfrac{1}{2+3\mathrm{i}}$
2. $Z_2 = \dfrac{2\mathrm{i}+3}{3\mathrm{i}-2}$
3. $Z_3 = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$

3

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   a) $\dfrac{z+2}{z+2\mathrm{i}} = \mathrm{i}$

   b) $3\mathrm{i}\bar{z} = 1-\mathrm{i}$

   c) $2z + \mathrm{i}\overline{z} = 5-\mathrm{i}$