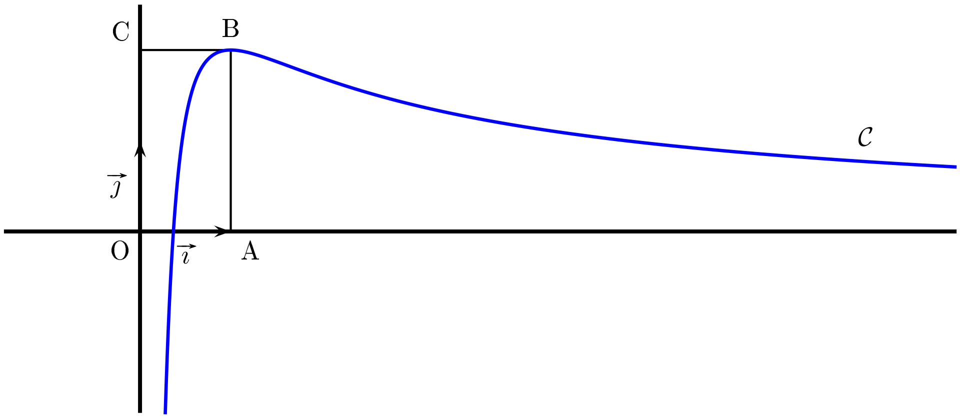
Devoir Mathématiques N^o 5 (1h30)

1 (11 points)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\;;\;+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,;\,0)$, $(1\,;\,2)$, $(0\,;\,2)$;
- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

   b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

   c) En déduire les réels a et b.

2. a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,\;;\;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

   b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

   c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\;;\;1]$.

   b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1\;;\;+\infty]$ tel que $f(\beta) = 1$.

   Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a,b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0{,}1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

a) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}

2 (3 points)

Résoudre les équations suivantes :

(E_1) : $\mathrm{e}^x = -4$

(E_2) : $(x+2)(2\mathrm{e}^x - 1) \geq 0$.

(E_3) : $2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1 = 0$.

3 (3 points)

Déterminer la dérivée de f. On rappelle que $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

$f_1(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 3}$; $I = \mathbb{R}$.

$f_2(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$; $I = \mathbb{R}$.

4 (3 points)

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$; en 0.

$f_2(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$; en $+\infty$.