Devoir Mathématiques N^o 4

1 Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^5 - \dfrac{15}{2}x^3 + \dfrac{3}{7}x + \dfrac{1}{2}$ $\quad I = \mathbb{R}$

$g(x) = \dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x}}$ $\quad I =]\frac{1}{3};+\infty[$

$h(x) = (2x+1)(x^2+x-7)$ $\quad I = \mathbb{R}$

2 Soit $f(x) = \cos^3 x$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$.
2. En déduire la primitive de F telle que $F(\frac{\pi}{2}) = 0$.

3 Soit $f(x) = \dfrac{3x + 2\sin x}{x+2}$

1. Donner l'ensemble de définition de f
2. Montrer que $f(x)$ peut être encadré par $\dfrac{3x-2}{x+2}$ et $\dfrac{3x+2}{x+2}$ (distinguer deux cas)
3. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

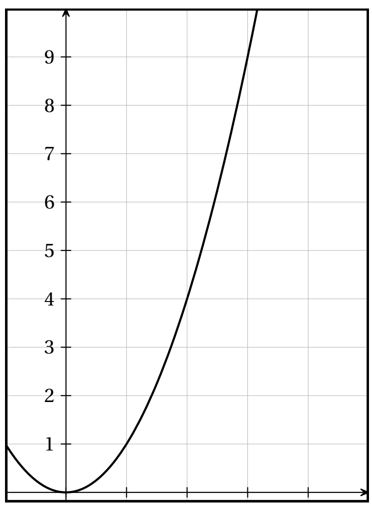
4 Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$.

5

1. On considère P définie sur $D =]-1;+\infty[$ par
$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$
   a) Etudier les variations de P.
   b) Montrer que $P(x) = 0$ admet une unique racine réelle α sur D et que $1 \leq \alpha \leq 2$.
   c) Etudier en justifiant le signe de P.
2. On considère la fonction numérique f définie sur D par
$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$
   a) Déterminer les limites de f aux bornes de D et préciser les asymptotes.
   b) Déterminer la dérivée f' de f et montrer que f et P ont même signe.
   c) Dresser le tableau de variations de f.
3. En utilisant la définition de α, montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$.

6 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note P le point de coordonnées $(2;3)$.

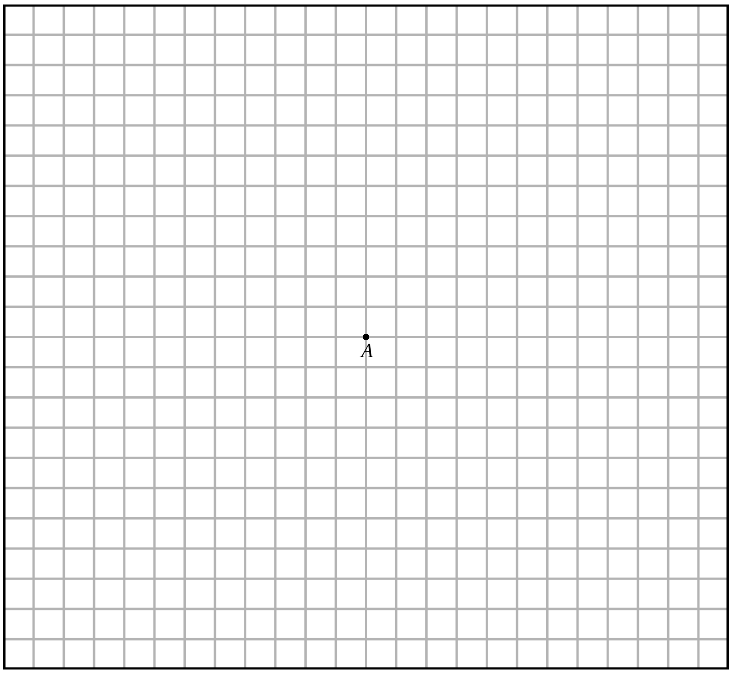
1. A l'aide d'un dessin, conjecturer le nombres de tangentes à $\mathscr{C}$ passant par P.
2. Soit T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse A, montrer que $P \in T_a$ si et seulement si on a $a^2 - 4a + 3 = 0$
3. Déterminer alors les tangentes à $\mathscr{C}$ passant par P.



7 On donne l'algorithme suivant destiné à faire marcher la tortue de Python. Au début la tortue est dans le point A du graphique tournée vers la droite. La tortue tourne toujours dans le sens direct, c'est-à-dire vers la gauche. Chaque case est de dimension 10. Dessiner le trajet parcouru par la tortue lorsqu'on exécute l'algorithme.

Algorithme 1: La tortue

```
Variables
    i, taille
Traitement
    taille ←10;
    pour i allant de 1 a 5 (inclus) faire
        avance(taille);
        tourne(90);
        avance(i*taille);
        tourne(180);
        avance(i*taille);
        tourne(90);
```



8 Résoudre

$(E_1): \quad \ln(x+3) = 2\ln(x+1)$

$(E_2): \quad \ln(5-x) - \ln 3 + \ln(x-1) \leq 0$

$(E_3): \quad 2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

9 Déterminer la primitive de $f(x) = \dfrac{4}{1-3x}$ sur $D =]\dfrac{1}{3}; +\infty[$.