Classe de $T^{ale}S3$ *6 mai 2013*

Devoir Mathématiques N^o 13 (1h)

1 Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

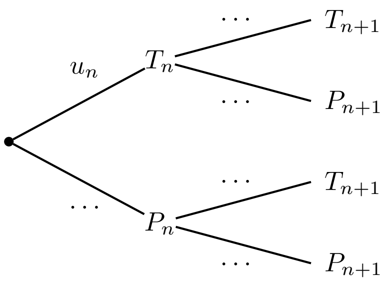
- T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
- P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.
   b) Montrer que $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.
   c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



   d) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2$.
   e) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   c) Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e. ?

2 Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le paramètre λ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\quad P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0,6.
   Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 0,131.

   Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près .
2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.
3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.
4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.
5. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
   a) Quelle est la loi suivie par Y ?
   b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures
   c) Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).