

Devoir Mathématiques N^o 12 (0,7h)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.

L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.

Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1 , à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.

On considère les évènements suivants :

J_1 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

J_3 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question 4.b) où une valeur arrondie à 10^{-2} suffit.

1. Calculer $P_{J_1}(B)$, probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement J_1 est réalisé.

Calculer de même la probabilité $P_{J_2}(B)$.

On admet dans la suite les résultats suivants :

$$P_{J_3}(B) = \frac{1}{30} \quad \text{et} \quad P_{J_4}(B) = \frac{1}{210}$$

2. Montrer que $P(B)$, probabilité de l'évènement B , vaut $\frac{1}{7}$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3?

4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.

a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N ?

b) Quelle est l'espérance et la variance de N ?

c) Calculer la probabilité de l'évènement ($N = 3$).

5. On décide de faire un jeu d'argent. Un joueur doit payer 10€ pour rentrer dans la partie. La partie se déroule comme expliqué dans l'introduction.

- Si le joueur termine avec 4 boules blanches, il gagne 1000€.
- S'il termine avec 3 boules blanches exactement (sans noire), il gagne 100€.
- S'il termine avec 2 boules blanches exactement (sans noire), il gagne 50€.
- S'il termine avec 1 boules blanches exactement (sans noire), il gagne 20€.

Ce jeu est-il favorable au joueur? (On pourra introduire la variable aléatoire X égale au gain algébrique du joueur.)