

Devoir Mathématiques N^o 9 (1h)

1 Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{l}
 1. I = \int_0^1 e^{1-2x} dx \\
 2. J = \int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1} dx
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 3. K = \int_0^1 \cos(x)e^{\sin(2x)} dx \\
 4. L = \int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^4} dx
 \end{array}
 \right.$$

2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \sin(2x) dx$. On ne cherchera pas à calculer I_n .

1. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$$

2. Quelle est la limite de I_n ?

3 On se propose de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} de l'intégrale $L = \int_0^1 f(x) dx$ où f est la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$

$$\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \tag{1}$$

2. Soient J et K les intégrales définies par :

$$J = \int_0^1 (2+x)e^{-x} dx, \quad K = \int_0^1 x^2 f(x) dx$$

a) Calculez J et montrer que $J = 3 - 4e^{-1}$.

b) Utiliser l'encadrement (1) pour démontrer que :

$$\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6} \tag{2}$$

c) Démontrer que $J + K = 4L$

d) Déduisez-en un encadrement de L , puis donnez une valeur approchée de L à 10^{-2} près.