Devoir Mathématiques N^o 8 (1h+)

1 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

Partie A

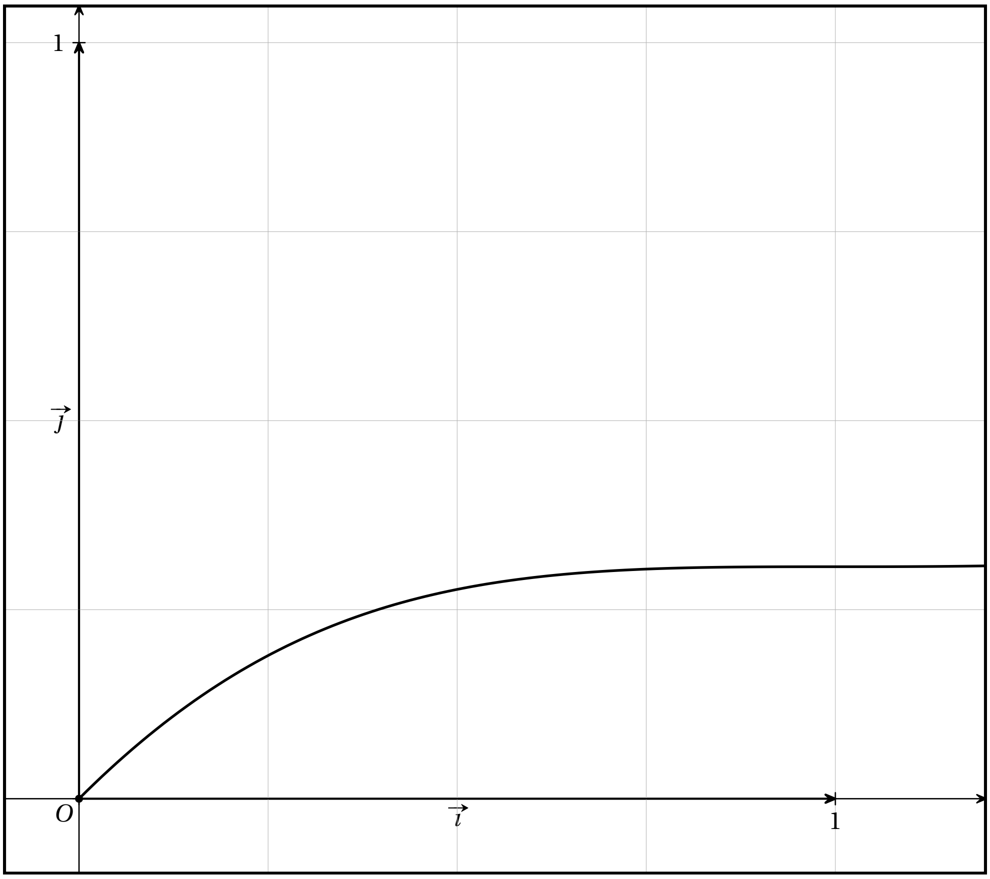
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   En déduire que si $x \in [0\ ;\ 1]$ alors $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.

Partie B

1. La courbe représentative de f est tracée sur le document donné en annexe. Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits
   de construction.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\ ;\ 1]$.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.



2 On considère une droite $\mathcal{D}$ munie d'un repère $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath})$.
Soit (A_n) la suite de points de la droite $\mathcal{D}$ ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_n A_{n+1}]$.

1. a) Placer sur un dessin la droite $\mathcal{D}$, les points $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ et A_6.
   On prendra 10 cm comme unité graphique.

   b) Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n.
   Calculer $a_2, a_3, a_4\, a_5$ et a_6.

   c) Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité : $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier $n, a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par
   $v_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

4. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

3 On donne l'algorithme ci-dessous.

1. Que fait cet algorithme ? Donner une expression de S (en introduisant une suite) puis calculer S.
2. On change la ligne 5 par I prend la valeur 4. Que vaut alors S ?

Algorithme 1: Je fais quoi ?

```
1  Variables
2     S,u,I
3  début
4     S←0
5     I←0
6     u←1
7     tant que I < 100 faire
8        S ←S + u;
9        u ←u/2;
10       I ←I + 1;
11    fin
12    Sorties
13       Afficher S;
14 fin
```