

Devoir Mathématiques N^o 7 (20 minutes)

1. On considère l'algorithme suivant (N désigne un entier naturel) :

Entrée : Saisir la valeur de N
Initialisation : Affecter à i la valeur 0
 Affecter à P la valeur 63,2
Traitement : Tant que $i < N$
 Affecter à i la valeur de $i + 1$
 Affecter à P la valeur de $1,002 \times P + 0,1$
Sortie : Afficher P

- a) Pourquoi cet algorithme s'arrête?
b) Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 4$ et donner une valeur approchée à 10^{-3} du nombre affiché en sortie.
2. L'objectif de cette question est de donner une prévision possible de la population de la France métropolitaine en 2050.

Au 1^{er} janvier 2010, cette population était de 63 200 000 habitants (source INSEE).

Une équipe de statisticiens prévoit un accroissement naturel de 2 pour 1 000 sur les 40 prochaines années (l'accroissement naturel étant la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité).

Cette équipe estime par ailleurs que le solde migratoire (qui représente la différence entre le nombre de personnes qui sont entrées en France métropolitaine et le nombre de personnes qui en sont sorties au cours de l'année) sera de 100 000 habitants soit 0,1 million.

Soit n le nombre entier naturel. On note p_n la population de la France métropolitaine (estimée en millions d'habitants) au 1^{er} janvier de l'année 2010 + n .

Ainsi, d'après ce qui précède $p_0 = 63,2$ et $p_{n+1} = 1,002 \times p_n + 0,1$.

- a) Déterminer les valeurs arrondies à 10^{-3} de p_1 et p_2 .
b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout nombre entier naturel n ,

$$p_n = 113,2 \times 1,002^n - 50.$$

- c) En déduire une estimation en millions d'habitants de la population française au premier janvier 2050 (on arrondira le résultat à 10^{-3} .)