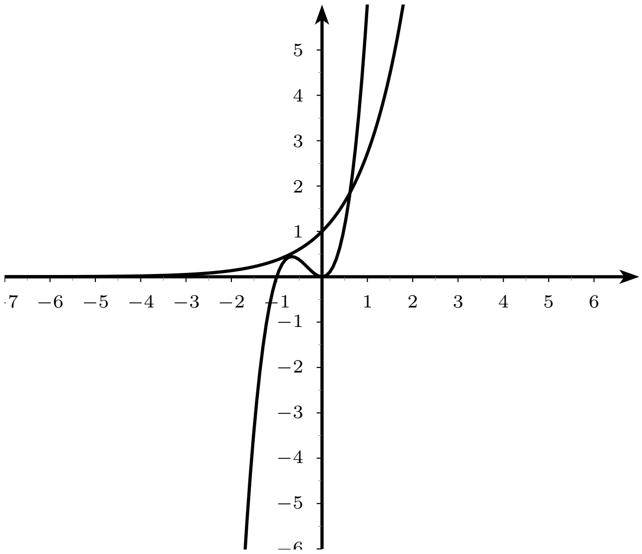
Devoir Mathématiques N^o 6 (1,5 heure)

1 (7 points)

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $\mathrm{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. a) Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.
   b) En déduire que l'équation (E)n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.
   c) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel de $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ par :
$$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x.$$
   Montrer que, sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.
3. a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$, on a :
$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$
   b) Déterminer les variations de la fonction h.
   c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
   d) Conclure quant à la conjecture de la partie A.

2 (3 points)

Soit $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z^2.
2. Déterminer la forme exponentielle de z^2.
3. En déduire la forme exponentielle de z.

3 (3 points)

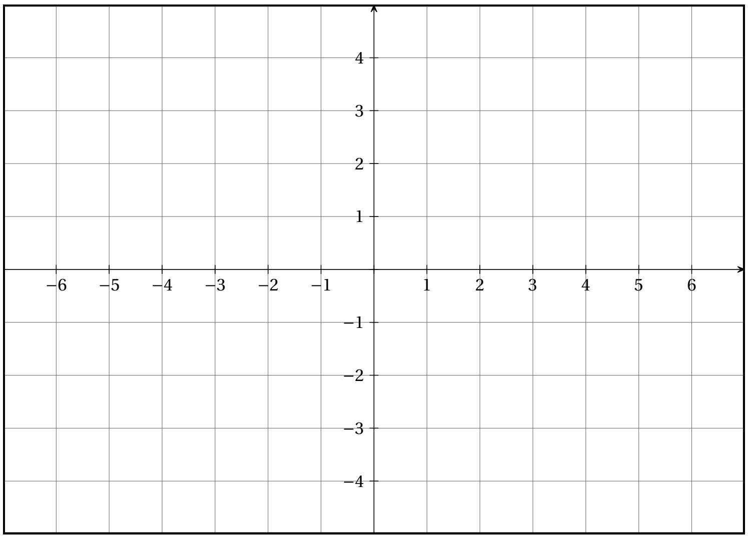
Représenter les ensembles suivants sur le graphique ci-dessous (on ne demande pas de justification) :

$\mathscr{E}_1 = \left\{ M(z) \ / \ \arg(z - 2\mathrm{i} + 1) = \dfrac{2\pi}{3} \quad (2\pi) \right\}$

$\mathscr{E}_2 = \left\{ M(z) \ / \ \arg\left(\dfrac{z - 2\mathrm{i} + 1}{z - 3 + \mathrm{i}}\right) = \pi \quad (2\pi) \right\}$

$\mathscr{E}_3 = \left\{ M(z) \ / \ Z = \mathrm{i}\dfrac{z - 2\mathrm{i} + 1}{z - 3 + \mathrm{i}} \in \mathbb{R}_+ \right\}$

$\mathscr{E}_4 = \{ M(z) \ / \ |z + 2 + \mathrm{i}| = |z - 2\mathrm{i}| \}$



4 (3 points)

1. Ecrire sous forme algébrique :

   $a_1 = \dfrac{3 + 2\mathrm{i}}{4 - 5\mathrm{i}}$ | $a_2 = -3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi}$

2. Déterminer la forme exponentielle des nombres suivants :

   $c_1 = 3\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$ | $c_2 = -2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{3}))$

3. Résoudre les équations suivantes :

   (E_1) : $-3\mathrm{i}\bar{z} + 3 = \mathrm{i};$ | (E_2) : $2\mathrm{i}z - \bar{z} = 2;$

5 (4 points)

On définit pour tout nombre complexe $z \neq \mathrm{i}$ le nombre $Z = \dfrac{z+3}{z-\mathrm{i}}$. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z est imaginaire pur. On se propose de déterminer $\mathscr{E}$ de deux manières différentes.

1. **(Par le calcul)**
   a) On pose $z = x + iy$ avec $x,y \in \mathbb{R}$. Déterminer $\Re(Z)$ et $\Im(Z)$ en fonction de x et y.
   b) En déduire la nature et les caracteristiques de l'ensemble $\mathscr{E}$.
2. **(Géométriquement)** Soit A d'affixe -3 et B d'affixe i. Déterminer $\mathscr{E}$ de manière géométrique.