Devoir Mathématiques N^o 4 (2 heures)

1 (5 points)

Résoudre les équations suivantes :

(E_1) : $\ln(x+2) - \ln(5-2x) = \ln(x+3)$

(E_2) : $\ln(x^2-1) \leq \ln(4x-1) - 2\ln 2$

(E_3) : $(7x-3)\ln(x+3) > 0$

(E_4) : $2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

2 (6 points)

Etudier les limites aux bornes de l'intervalle I

$f_1(x) = (\ln x)^4$; $I = \mathbb{R}_+^\star$.

$f_2(x) = \dfrac{1}{\ln x}$; $I =]1; +\infty[$.

$f_3(x) = \ln(\ln x)$; $I =]1; +\infty[$.

$f_4(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$; $I = \mathbb{R}_+^\star$.

3 (3 points)

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x+1}$; $I = \mathbb{R}_+^\star$.

$f_2(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x + 2}$; $I = \mathbb{R}$.

$f_3(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$; $I =]2; +\infty[$.

4 (3 points)

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I indiqué.

$f_1(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 1$; sur $I =]0; +\infty[$.

$f_2(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^4}$; sur $I =]0; +\infty[$.

$f_3(x) = \sin x \cos^4 x$; sur $I = \mathbb{R}$.

5 (6 points)

Soit f définie sur $D = \mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = x\ln x - 2x + 1$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de D.
2. Déterminer $f'(x)$, puis le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution α unique α sur $[\mathrm{e}; +\infty[$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Déterminer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f passant par l'origine O.

6 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$$

1. On appelle g la fonction définie sur I par $g(x) = \tan x - x$.
   a) Montrer que g est impaire.
   b) Déterminer les limites de g aux bornes de I.
   c) Étudier les variations de g.
   d) Calculer $g(0)$ et déterminer le signe de $g(x)$ sur I.
2. a) Calculer la dérivée f' de f sur I..
   b) Factoriser $f'(x)$ pour tout x de I puis, en utilisant la question 1, déterminer le signe de $f'(x)$ sur I.
   c) Déterminer les variations de f sur I.
   d) En déduire le signe de f sur I puis que pour tout $x \in I$, $\tan x \leq x + \frac{x^3}{3}$.