

Devoir Mathématiques N^o 3 (2 heures)

1 _____ (8 points)

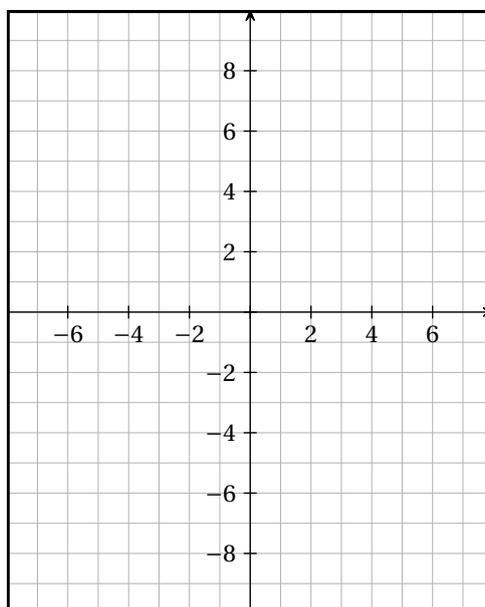
1. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans \mathbb{R} .
 - Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
 - Déduisez des questions précédentes le signe de $g(x)$.
2. Soit f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; +1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$$

- Déterminer les limites de f aux bornes de D et en donner une interprétation géométrique.
- Démontrer que pour tout $x \in D$ on a

$$f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

- Dresser le tableau de variation de f .
- Représenter l'allure de la courbe représentative de f sur le graphique suivant.
- Démontrer que $f(\alpha) = \frac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$.



2 _____ (3 points)

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = (x^2 + 2x - 9)^4; \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}.$$

$$f_2(x) = \left(\frac{3x - 5}{x^2 + 2}\right)^3; \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}.$$

$$f_3(x) = \sqrt{\frac{3x - 5}{x^2 + 2}}; \quad \mathcal{D} =]\frac{5}{3}; +\infty[$$

$$f_4(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right); \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}$$

3 _____ (2 points)

On considère l'algorithme suivant dans lequel f est une fonction numérique.

```

Algorithme 1: ????
1 Variables
2   |  $a, b, c$  et  $p$ 
3 début
4   | Entrées
5   |   | Lire :  $a, b$  et  $p$ ;
6   | Traitement
7   |   | tant que  $b - a > p$  faire
8   |     |   |  $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$ ;
9   |     |   | si  $f(a) \times f(c) < 0$  alors
10  |     |     |   |  $b \leftarrow c$ ;
11  |     |     |   | sinon
12  |     |     |     |  $a \leftarrow c$ ;
13  |   |
14  |   | Sorties
15  |   |   | Afficher  $a, b, c$  et  $p$ ;
16 fin
    
```

1. Faire fonctionner l'algorithme avec la fonction $f(x) = x^2 - 2$, $a = 1$, $b = 2$ et $p = 0,1$. Indiquer les valeurs successives des variables a, b, c dans le tableau ci-dessous.

a	b	c

2. Quel est l'objectif de cet algorithme ?
3. Quel est le rôle de p ?

4 _____ (2 points)

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x^3} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation géométrique.

5 _____ (5 points)

Soit f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^3 - 14x^2 - 72$$

On donne le graphe de f ci-contre.

1. Conjecturer à l'aide du graphe ci-joint le nombre de tangentes passant par O .
2. a) Soit T_a la tangente au point d'abscisse a . Montrer que

$$O \in T_a \iff a^3 - 7a^2 + 36 = 0 \quad (E)$$

- b) Montrer que 6 est solution de (E) , résoudre (E) puis conclure quant à la conjecture.

