BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Semaine du 4 mars 2013

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 6

OBLIGATOIRE

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **6 points**

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1. a) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   c) Montrer que, pour tout x strictement positif on a

   $$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

   d) En déduire la limite de f en $+\infty$.
   e) Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.
   b) Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\,;\,15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   c) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 5\ln(u_n + 3) \quad \text{pour tout entier naturel } n \neq 0 \end{cases}$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

En annexe 1 on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1. a) Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.
   b) Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)
2. a) Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.
   c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a
   $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   d) Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.
   e) En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
3. On considère l'algorithme suivant :

u prend la valeur 4
Répéter Tant que $u - 14{,}2 < 0$
u prend la valeur de $5\ln(u+3)$
Fin du Tant que
Afficher u

   a) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Justifier que cet algorithme se termine.
   b) Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

Exercice 2 **5 points**

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\,\vec{v})$, on appelle A le point d'affixe 1 et $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.
La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré avec 4 cm pour unité graphique.

Partie A

On considère l'équation

$$(E):\quad z^2 - 2z + 2 = 0,$$

où z est un nombre complexe. On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
2. On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $(O\,;\vec{u},\,\vec{v})$. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{2z-1}{2z-2}.$$

1. Placer le point A et tracer le cercle $\mathcal{C}$ sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a
$$(z'-1)\,(z-1) = \frac{1}{2}.$$
3. Montrer que pour tout point M distinct de A on a :
   - $\text{A}M \times \text{A}M' = \frac{1}{2}$;
   - $M' \neq \text{A}$;
   - $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M}\right) + \left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M'}\right) = 0 + 2k\pi$, où k est un entier relatif
4. On considère le point P d'affixe $z_{\text{P}} = 1 + \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.
5. En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P$'$, image de P par f, et réaliser cette construction.
6. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit un point M appartenant à la droite D d'équation $x = \frac{3}{4}$. Soit M' son image par f.
   a) Montrer que le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre O de rayon 1.
   b) Tout point de $\mathcal{C}'$ a-t-il un antécédent par f ?

Exercice 3 — 6 points

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. a) On admet que $g(x) = 0$ admet sur $[0~;~+\infty[$ une unique solution notée α. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   b) Démontrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0~;~+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O~;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

La figure est donnée en annexe.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x~;~f(x))$,

P le point de coordonnées $(x~;~0)$,

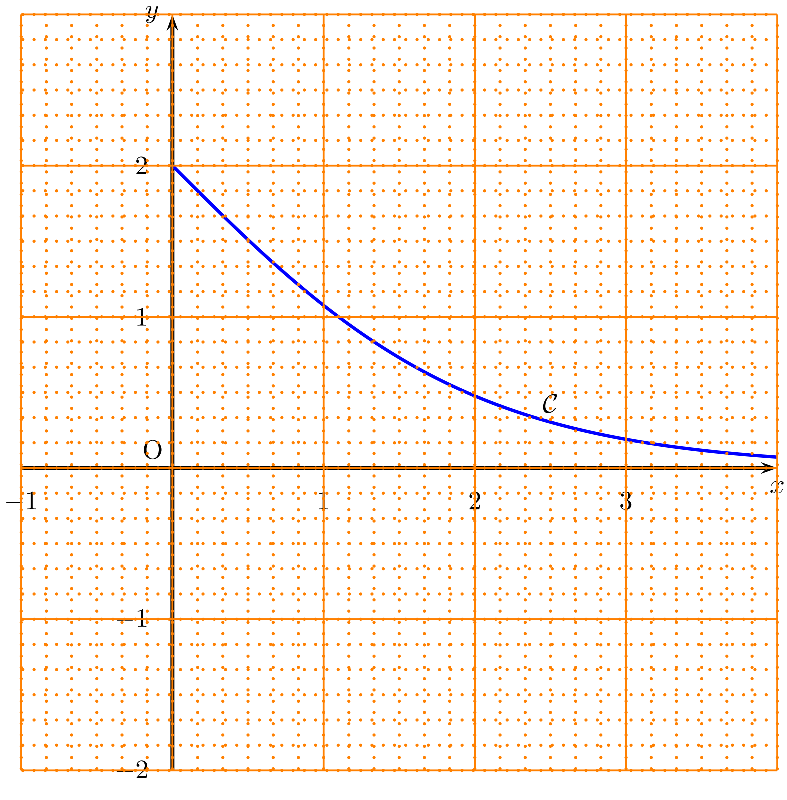
Q le point de coordonnées $(0~;~f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α.

   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.



Exercice 4 **3 points**

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

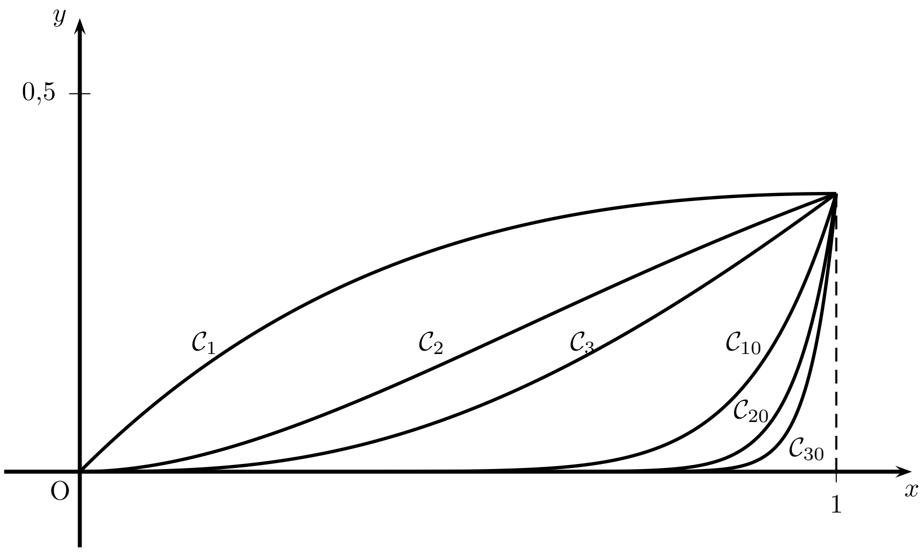
$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} - (x\mathrm{e}^{-x})'$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis calculer I_1.
2. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}, \mathcal{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.

   Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant votre démarche. Pouvez-vous aussi conjecturer la limite de (I_n) ?
3. a) Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1, on a $(I_n) \geq 0$.

   b) Montrer que (I_n) est décroissante et conclure quant à la convergence de (I_n).
4. a) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ on a $x^n\mathrm{e}^{-x} \leq x^n$.

   b) En déduire un encadrement de (I_n) et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n)$.



Annexe 1
(Exercice 1)
Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie