BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Avril 2012

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 6

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 5 points

Partie A Question de cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que les fonctions dérivées u' et v' soient continues sur I.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ de I.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

On note respectivement $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentatives de f de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.
Les courbes sont tracées en annexe.

1. a) Déterminer les coordonnées des points communs à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
   b) Donner les positions relatives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur $\mathbb{R}$.
2. a) À l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b) Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

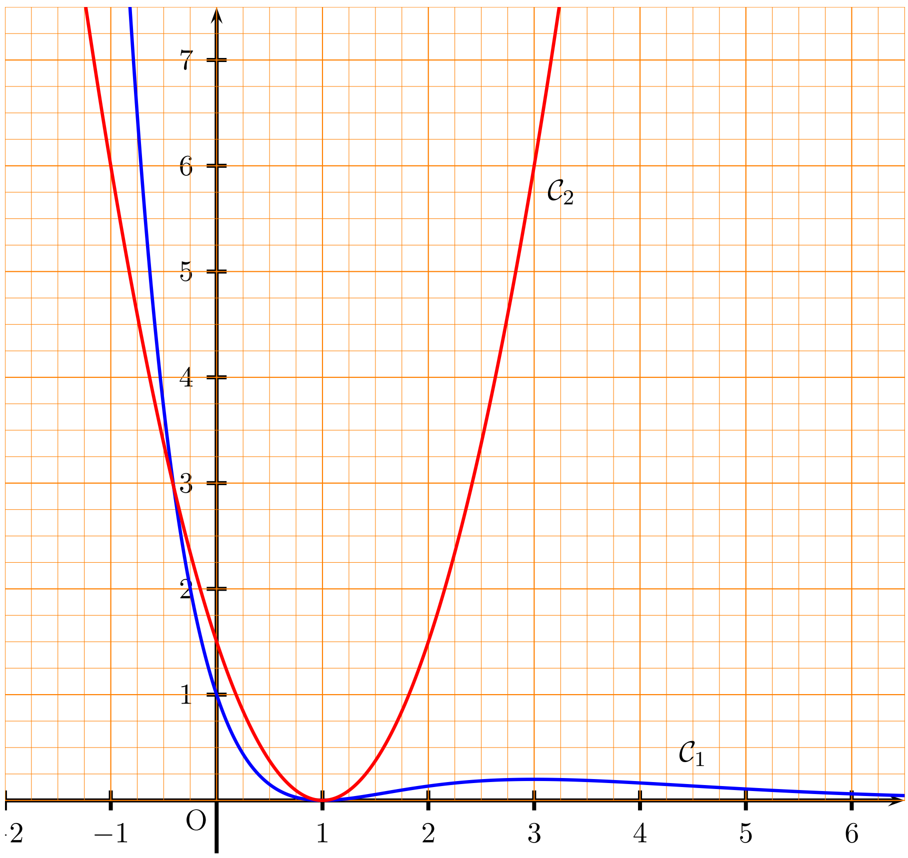
$$u_n = \int_0^1 (x-1)^{2n}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. a) Démontrer que, pour tout x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul,
   $$0 \leqslant (x-1)^{2n}\mathrm{e}^{-x} \leqslant (x-1)^{2n}.$$
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
   $$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

ANNEXE

EXERCICE 1

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie



Exercice 2 — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :
A$(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$, B$(1\ ;\ -6\ ;\ -1)$ et C $(2\,;\,2\,;\,2)$.

1. a) Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

   b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit P le plan d'équation : $x - y + z - 4 = 0$.

   a) Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants.

   b) Soit D la droite intersection des plans P et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

3. On considère la sphère S de centre $\Omega(3\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$. On admet que la droite D a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1+t \\ y & = & -3+2t \\ z & = & t, \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   a) Montrer que le point I appartient à la droite D.

   b) Montrer que le point I appartient à la sphère S.

   c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.

Exercice 3 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère un carré direct ABCD (c'est à dire un carré ABCD tel que :
$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$) de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [DA].
Γ_1 désigne le cercle de diamètre [AI] et Γ_2 désigne le cercle de diamètre [BK].

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que $s(\mathrm{A}) = \mathrm{I}$ et $s(\mathrm{B}) = \mathrm{K}$.
2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s.
3. a) Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s.
   b) Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment [ID].
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés.
   (On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(\mathrm{A}\ ;\ \dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.
2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe

$$z' = \frac{\mathrm{i}}{2}z + 5 + 5\mathrm{i}.$$

3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s.
4. Calculer l'affixe z_{E} du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.
5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω.

Exercice 4 — 5 points

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f défmie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. Vérifier que : $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$.

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.
   a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   b) En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}~;~1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
   c) Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g\left(u_n\right)$.
   a) En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   b) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
3. Recherche d'une valeur approchée de α
   a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.
   b) On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
   En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leqslant \alpha \leqslant v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.