Devoir Mathématiques N^o 7 (1,5 heure)

Exercice 1 : (4,5 points)

1. Ecrire sous forme algébrique :

$a_1 = \dfrac{7+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$

$a_2 = \dfrac{-3}{(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}$

$a_3 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{2}} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}$

2. Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants et les écrire sous forme algébrique :

$b_1 = \dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$

$b_2 = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

3. Déterminer la forme exponentielle des nombres suivants :

$c_1 = -3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

$c_2 = -3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

$c_3 = -2\mathrm{i}$

$c_4 = 4 - 4\mathrm{i}$

Exercice 2 : (1,5 points)

Résoudre les équations suivantes :

(E_1) : $\mathrm{i}\bar{z} + 2 = \mathrm{i}$;

(E_2) : $\mathrm{i}z + \bar{z} = 2$;

(E_3) : $5z^2 + z = 15$;

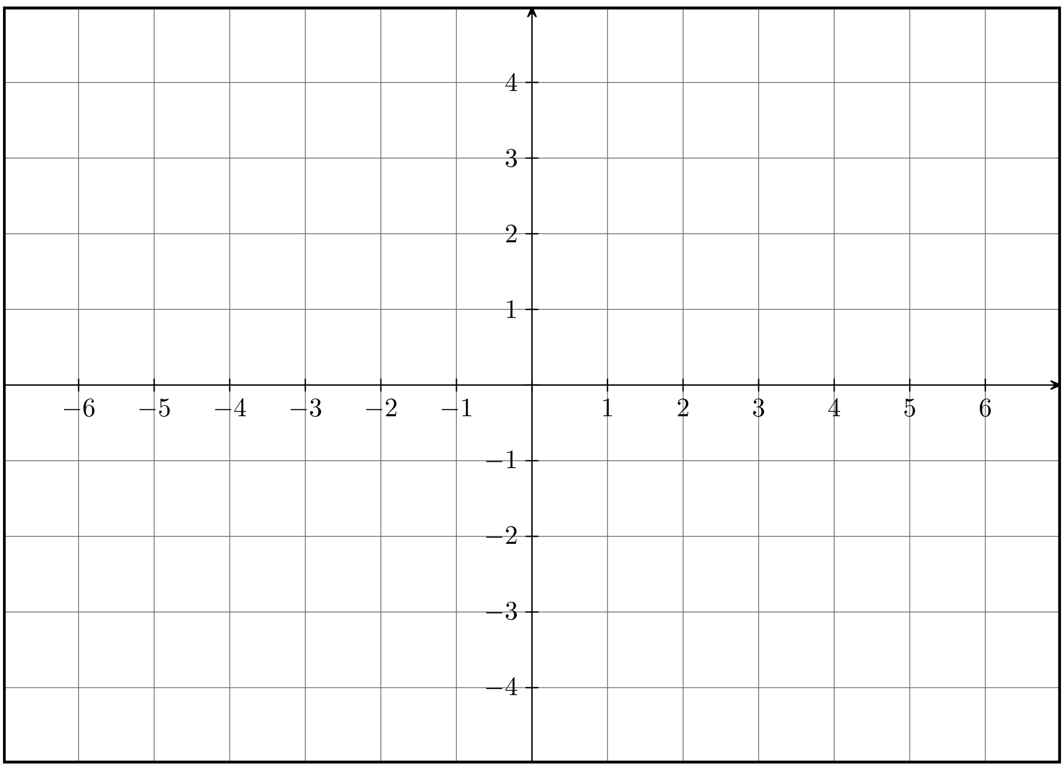
Exercice 3 : (2 points)

Représenter les ensembles suivants sur le graphique ci-dessous (on ne demande pas de justification) :

$\mathscr{E}_1 = \left\{ M(z) \ / \ \arg(z+3\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{6} \ \ (\pi) \right\}$

$\mathscr{E}_2 = \{ M(z) \ / \ |z+4+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}| \}$

$\mathscr{E}_3 = \{ M(z) \ / \ |z-4\mathrm{i}| = 2 \}$



Exercice 4 : (5 points)

Soit $z_1 = \sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 - 2\mathrm{i}$.

1. Déterminer une forme exponentielle de z_1.
2. Déterminer une forme exponentielle de z_2.
3. Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
4. Donner une forme exponentielle de $\dfrac{z_1}{z_2}$ et en déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 5 : (3 points)

Soit $M(5+3\mathrm{i})$, $N(1+7\mathrm{i})$, $P(-3+3\mathrm{i})$, $Q(1-\mathrm{i})$.

1. Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.
2. Déterminer la forme algébrique de $a = \dfrac{z_Q - z_M}{z_N - z_M}$
3. En déduire la nature du quadrilatère $MNPQ$.

Exercice 6 : (3 points)

Soit $A(-3\mathrm{i})$ et $B(3+2\mathrm{i})$. Soit $M(z)$. Pour $M \neq B$ on définit le point M' d'affixe $Z = \dfrac{z+3\mathrm{i}}{z-3-2\mathrm{i}}$.
Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tel que M' soit un point de l'axe des imaginaires pur.