# Baccalauréat blanc - Terminale S
# Mathématiques - Spécialité
# Éléments de correction

## Exercice 1 — 4 points

### Partie A

1. Si $a$ et $b$ pairs alors $a \equiv 0 \pmod 2$ et $b \equiv 0 \pmod 2$ donc par compatibilité de la congruence avec les puissances et la somme on a :$a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod 2$.

   De même si $a$ et $b$ sont impairs alors $a \equiv 1 \pmod 2$ et $b \equiv 1 \pmod 2$ donc on a $a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod 2$

   D'autre part, $N$ est impair donc $N \equiv 1 \pmod 2$.

   En conclusion, si $N = a^2 - b^2$ et $a$ et $b$ ont la même parité, on a $1 \equiv 0 \pmod 9$ ce qui est absurde.

   Donc $a$ et $b$ ont des parités différentes.

2. On a $N = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

   $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ donc $a+b \in \mathbb{N}$ et $a-b \in \mathbb{Z}$. De plus $a - b = \dfrac{N}{a+b} > 0$ donc $a-b \in \mathbb{N}$.

   En conclusion, on a bien $N$ produit de deux entiers naturels $p = a+b$ et $q = a-b$.

3. $a$ et $b$ n'ayant pas la même parité, l'un est pair et l'autre est impair, donc $a+b$ et $a-b$ sont impairs, c'est-à-dire $p$ et $q$ sont impairs.

### Partie B

1. a) Si $x \equiv y \pmod 9$ alors $x^2 \equiv y^2 \pmod 9$ d'où la construction du tableau suivant.

| $X \equiv \quad (9)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X^2 \equiv \quad (9)$ | 0 | 1 | 4 | 0 | 7 | 7 | 0 | 4 | 1 |

   b) $b^2$ est un carré, donc d'après ce qui précéde, les restes possibles de $b^2$ modulo 9 sont 0, 1, 4 ou 7.

   Finalement les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$ sont donc 0, 1, 4 ou 7.

   D'autre part, $250\,507 \equiv 1 \pmod 9$, donc $a^2 \equiv b^2 + 1 \pmod 9$

   donc les restes possibles modulo 9 de $a^2$ sont 1, 2, 5, ou 8.

   c) Mais d'après le tableau précédent, les restes possibles de $a^2$ modulo 9 sont 0, 1, 4 ou 7. Donc l'unique possibilité est que $a^2 \equiv 1 \pmod 9$ et d'après le tableau cela implique $a \equiv 1 \pmod 9$ ou $a \equiv 8 \pmod 9$.

2. On a $N = a^2 - b^2$, donc $N < a^2$ et en prenant la racine carrée (qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$) on en déduit $a > \sqrt{N} \simeq 500{,}5$. Donc $a \geq 501$ car $a \in \mathbb{N}$.

   Supposons qu'un couple de la forme $(501\,;b)$ soit solution de $(E)$, alors $b^2 = 501^2 - 250\,507$ donc $b^2 = 494$ qui n'est pas un carré ($\sqrt{494} \simeq 22{,}2$) donc il est impossible que $(501\,;b)$ soit solution de $(E)$.

3. a) Supposons que $(a\,;b)$ soit solution de $(E)$. D'après la question B1c on a $a \equiv 1 \pmod 9$ ou $a \equiv 8 \pmod 9$ ce qui équivaut à $a \equiv 1 \pmod 9$ ou $a \equiv -1 \pmod 9$.

   D'autre part $504 \equiv 0 \pmod 9$ donc par somme on a $a \equiv 505 \pmod 9$ ou $a \equiv 503 \pmod 9$.

   b) Pour $k = 0$ on cherche les solutions de la forme $(505\,;b)$, donc $b^2 = 505^2 - 250\,507 = 4\,518$ qui n'est pas un carré. Donc pas de solution avec $k = 0$.

   Pour $k = 1$, on cherche les solutions de la forme $(514\,;b)$, donc $b^2 = 505^2 - 250\,507 = 13\,689 = 117^2$.

   En conclusion : la plus petite valeur de $k$ pour laquelle $(505 + 9k\,;b)$ soit solution est 1.

   Ce couple est $(514\,;17)$.

### Partie C

1. On déduit de ce qui précède que $250\,507 = 514^2 - 117^2$ donc par factorisation, on a $250\,507 = (514 + 117)(514 - 117)$ c'est-à-dire $250\,507 = 631 \times 397$.

2. 631 et 397 étant des nombres premiers, il s'agit de la décomposition en facteurs premiers de 250 507. Cette décomposition étant unique. L'écriture trouvée est unique.

## Exercice 2 — 8 points

**Partie A - Restitution organisée de connaissances**

1. $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax} = af(x)$
   Donc $f$ est solution de $y' = ay$ .
2. $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) &= g'(x)\mathrm{e}^{-ax} + (-a\mathrm{e}^{-ax})g(x)\\ &= ag(x)\mathrm{e}^{-ax} - a\mathrm{e}^{-ax}g(x), \text{ car } g \text{ est solution de } y' = ay\\ &= 0\end{aligned}$$

   Donc $h$ est une fonction constante .
3. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\text{Si } g \text{ est solution de } y' = ay \quad &\text{alors} \quad \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = k \text{ avec } k \text{ constante réelle arbitraire}\\ &\text{alors} \quad \forall x \in \mathbb{R}, g(x)\mathrm{e}^{-ax} = k\\ &\text{alors} \quad \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = k\mathrm{e}^{ax}\end{aligned}$$

   Or, d'après la question 1, les fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{ax}$ sont solutions de $y' = ay$.
   Donc l'ensemble des solutions de $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto k\mathrm{e}^{ax}$ avec $k$ constante réelle arbitraire.

**Partie B**

1. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2 + \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}} = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}{(2 + \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}) \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}} \text{ car } \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} \neq 0$$

   ainsi,

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} + 1}}$$

2. En $+\infty$ :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} = 0\\ \displaystyle\lim_{X \to 0} \frac{3}{1 + 2X} = 3\end{array}\right\} \text{donc, par composée, } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3 .$$

   En $-\infty$ :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} = +\infty\\ \displaystyle\lim_{X \to +\infty} \frac{3}{1 + 2X} = 0\end{array}\right\} \text{donc, par composée, } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 .$$

3. $f$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes usuels.
   De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3 \times \frac{-2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}{(1 + \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}})^2} = \frac{3}{2} \times \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}{(1 + \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}})^2} > 0 \text{ car } \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} > 0$$

   D'où $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ .

**Partie C**

1. a) Les solutions de $(E_1)$ sont les fonctions $g$ définies sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}$ avec $k$ constante réelle arbitraire.

   b) $g(0) = 1 \Leftrightarrow k\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\times 0} = 1 \Leftrightarrow k = 1.$ Ainsi, $\forall t \in [0\,;+\infty[,\ g(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}$ .

   c) Il faut résoudre l'inéquation $g(t) \geqslant 3$.

$$\begin{aligned} g(t) \geqslant 3 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{4}t} \geqslant 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}t \geqslant \ln 3 \text{ car } t \mapsto \ln t \text{ est strictement croissante sur } ]0;+\infty[ \\ &\Leftrightarrow t \geqslant 4\ln 3 \end{aligned}$$

   or $4\ln 3 \approx 4{,}394$

   Ainsi, la population de gazelles dépassera 300 individus au bout de 5 ans .

2. a)

$$\begin{aligned} h \text{ est solution de } (E_3) &\Leftrightarrow \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \forall t \geqslant 0 \\ h(0) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{u}\right)'(t) = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{u}\right)(t) + \dfrac{1}{12} & \forall t \geqslant 0 \\ \left(\dfrac{1}{u}\right)(0) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{u'(t)}{u^2(t)} = -\dfrac{1}{4u(t)} + \dfrac{1}{12} & \forall t \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{u(0)} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -u'(t) = -\dfrac{u(t)}{4} + \dfrac{[u(t)]^2}{12} & \forall t \geqslant 0 \\ u(0) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} & \forall t \geqslant 0 \\ u(0) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$h \text{ est solution de } (E_3) \Leftrightarrow u \text{ est solution de } (E_2)$$

   b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ sont les fonctions $h$ définies par :

   $h(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$ avec $K$ constante réelle arbitraire.

   De plus $h(0) = 1 \Leftrightarrow K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 0} + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow K = \frac{2}{3}$

   Ainsi, $h$ est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(t) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$ .

   On a alors :

$$\forall t \geqslant 0,\quad u(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 1}$$

   c) On reconnait pour $u$ l'expression de la fonction $f$ étudiée partie B.

   Dans ce modèle la taille de la population tend vers 300 gazelles lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

## Exercice 3 — 5 points

1. $(E)$ est une équation du second degré à coefficients réels dont le discriminant $\Delta$ vérifie :

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 153 = -2304 < 0$$

$(E)$ admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{12+\mathrm{i}\sqrt{2304}}{2\times 4} = \frac{12+48\mathrm{i}}{8} = \boxed{\frac{3}{2}+6\mathrm{i}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \boxed{\frac{3}{2}-6\mathrm{i}}$$

2. a) $Q$ est l'image du point $B$ dans la translation de vecteur $\vec{w}$ donc :

$$z_Q = z_B + z_{\vec{w}} = \frac{3}{2} - 6\mathrm{i} - 1 + \frac{5}{2}\mathrm{i}$$
$$\boxed{z_Q = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\mathrm{i}}$$

b) $R$ est l'image du point $P$ par l'homothétie de centre $C$ et de rapport $-\frac{1}{3}$ donc :

$$z_R - z_C = -\frac{1}{3}(z_P - z_C)$$

On a ainsi :

$$z_R = -\frac{1}{3}(z_P - z_C) + z_C = -\frac{1}{3}\left(3+2\mathrm{i}+3+\frac{1}{4}\mathrm{i}\right) - 3 - \frac{1}{4}\mathrm{i} = -\frac{1}{3}\left(6+\frac{9}{4}\mathrm{i}\right) - 3 - \frac{1}{4}\mathrm{i} = -2 - \frac{3}{4}\mathrm{i} - 3 - \frac{1}{4}\mathrm{i}$$
$$\boxed{z_R = -5 - \mathrm{i}}$$

c) $S$ est l'image du point $P$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donc :

$$z_S - z_A = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z_P - z_A)$$

On a ainsi :

$$z_S = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z_P - z_A) + z_A = -\mathrm{i}\left(3+2\mathrm{i}-\frac{3}{2}-6\mathrm{i}\right) + \frac{3}{2} + 6\mathrm{i} = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{2}-4\mathrm{i}\right) + \frac{3}{2} + 6\mathrm{i} = -\frac{3}{2}\mathrm{i} - 4 + \frac{3}{2} + 6\mathrm{i}$$
$$\boxed{z_S = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}\mathrm{i}}$$

d) Voir figure ci-dessous.

3. a) $z_R - z_Q = -5 - \mathrm{i} - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\mathrm{i} = -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i}$

$z_S - z_P = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}\mathrm{i} - 3 - 2\mathrm{i} = -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i}$

Ainsi $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$ donc $\boxed{PQRS \text{ est un parallélogramme}}$.

b)

$$\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{-\frac{11}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\mathrm{i}} = \frac{-\frac{11}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}}{\frac{5}{2}+\frac{11}{2}\mathrm{i}} = \frac{-11+5\mathrm{i}}{5+11\mathrm{i}} = \frac{(-11+5\mathrm{i})(5-11\mathrm{i})}{5^2+11^2} = \frac{-55+121\mathrm{i}+25\mathrm{i}+55}{25+121} = \frac{146\mathrm{i}}{146}$$
$$\boxed{\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \mathrm{i}}$$

On en déduit : $z_R - z_Q = \mathrm{i}(z_P - z_Q) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z_P - z_Q)$. $R$ est donc l'image de $P$ par la rotation de centre $Q$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Ainsi $QR = QP$ et $\left(\overrightarrow{QP};\overrightarrow{QR}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

$\boxed{PQRS \text{ est donc un carré}}$.

c) Les diagonales d'un carré ont même longueur. Le centre $\Omega$ de $PQRS$ vérifie donc $\Omega P = \Omega Q = \Omega R = \Omega S$.

$\boxed{P, Q, R \text{ et } S \text{ appartiennent donc à un même cercle}}$ de centre $\Omega$

$\Omega$ est le milieu des diagonales donc :

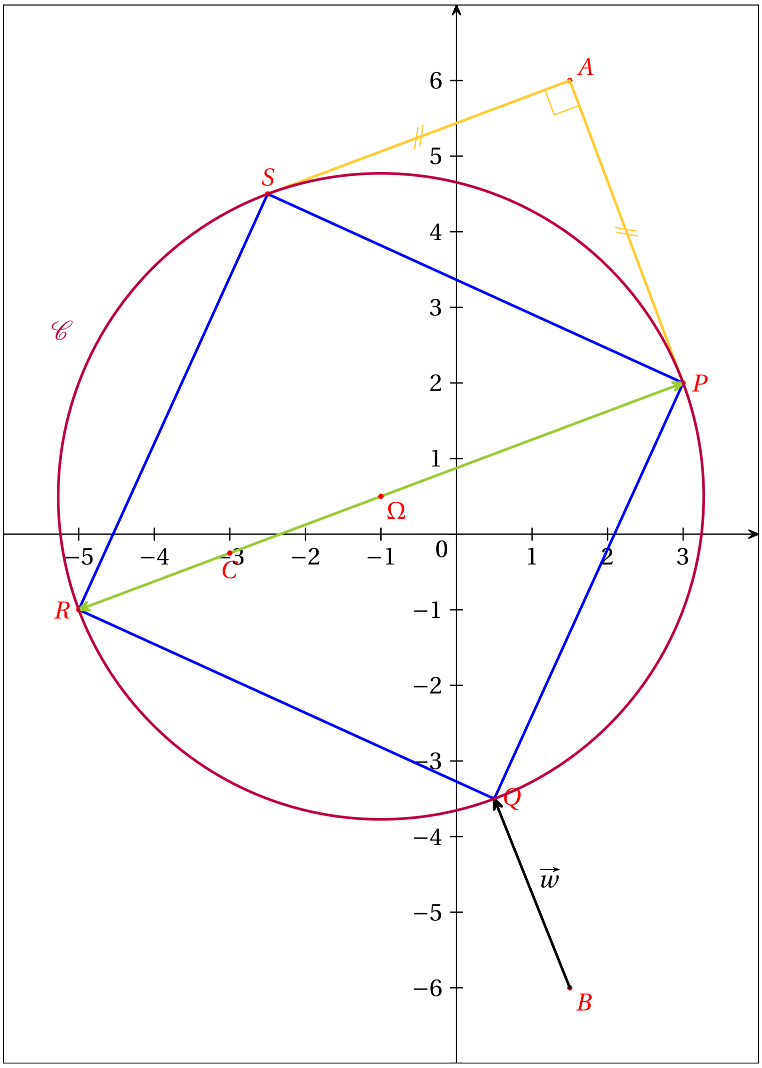
$$z_\Omega = \frac{1}{2}(z_S + z_Q) = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}\mathrm{i}+\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{1}{2}(-2+\mathrm{i}) = -1+\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

$$\rho = \frac{1}{2}PR = \frac{1}{2}|z_P - z_R| = \frac{1}{2}|3+2\mathrm{i}+5+\mathrm{i}| = \frac{1}{2}|8+3\mathrm{i}| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2+3^2} = \frac{\sqrt{73}}{2}$$

4. $\dfrac{z_\Omega - z_P}{z_A - z_P} = \dfrac{-1+\frac{1}{2}\mathrm{i}-3-2\mathrm{i}}{\frac{3}{2}+6\mathrm{i}-3-2\mathrm{i}} = \dfrac{-4-\frac{3}{2}\mathrm{i}}{-\frac{3}{2}+4\mathrm{i}} = \dfrac{8+3\mathrm{i}}{3-8\mathrm{i}} = \dfrac{(8+3\mathrm{i})(3+8\mathrm{i})}{3^2+8^2} = \dfrac{73\mathrm{i}}{73} = \mathrm{i}$

   Ainsi $\left(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{P\Omega}\right) = \arg\left(\dfrac{z_\Omega - z_P}{z_A - z_P}\right)\ (2\pi) = \arg(\mathrm{i})\ (2\pi) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

   Les droites $(PA)$ et $(P\Omega)$ sont donc perpendiculaires et $(AP)$ est donc tangente à $\mathscr{C}$ .




## Exercice 4 — 3 points

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 2n+3 > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.
2. a) – Initialisation
   $u_0 = 1$ et $0^2 = 0$ donc $u_0 > 0^2$. L'inégalité est vraie pour $n = 0$.
   – Hérédité
   Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons l'inégalité vraie au rang $p$ c'est-à-dire $u_p > p^2$.
   On a $u_{p+1} = u_p + 2p + 3$ donc $u_{p+1} > p^2 + 2p + 3 = (p+1)^2 + 2$
   Ainsi $u_{p+1} > (p+1)^2$. L'inégalité est vraie au rang $p+1$.

- Conclusion
  $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > n^2$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. a) $u_0 = 1$, $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 4$, $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 9$,
   $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 16$, $u_4 = u_3 + 2 \times 3 + 3 = 25$.

   b) Les calculs précédents permettent de conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.
   Démontrons cette conjecture par récurrence.

   - Initialisation
     $u_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$ donc $u_0 = (0+1)^2$. L'égalité est vraie pour $n = 0$.
   - Hérédité
     Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons l'égalité vraie au rang $p$ c'est-à-dire $u_p = (p+1)^2$.
     On a $u_{p+1} = u_p + 2p + 3 = (p+1)^2 + 2p + 3 = p^2 + 2p + 1 + 2p + 3 = p^2 + 4p + 4 = (p+2)^2$
     Ainsi $u_{p+1} = (p+2)^2$. L'égalité est vraie au rang $p+1$.
   - Conclusion
     $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)^2$.