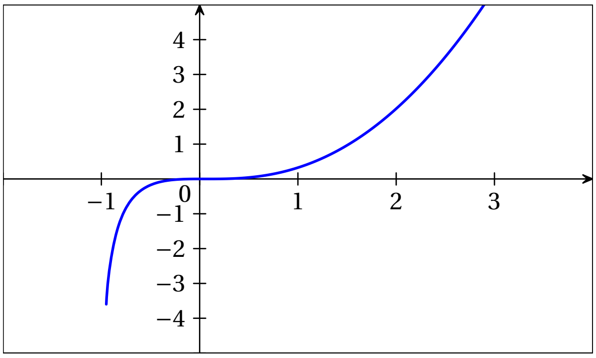
Baccalauréat blanc - Terminale S
Mathématiques - Obligatoire
Éléments de correction

Exercice 1 — 4 points

1. On obtient, sur l'écran de la calculatrice, le tracé suivant :



2. a) La fonction **f semble strictement croissante** sur $]-1\,;3]$.

   b) L'équation **$f(x)=0$ semble avoir 0 pour unique solution** .

3. a) f est dérivable sur $I=]-1\,;+\infty[$ (somme, composée de fonctions dérivables).

   $\forall x\in I,\ f'(x)=2x-2{,}2+\dfrac{2{,}2}{x+1}=\dfrac{2x(x+1)-2{,}2(x+1)+2{,}2}{x+1}=\dfrac{2x^2-0{,}2x}{x+1}=\dfrac{2x(x-0{,}1)}{x+1}$

   $f'(x)$ est donc du signe de $2x(x-0{,}1)$ sur I. (Tableau ci-dessous)

   b) En -1 :

   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} x+1=0^+\\ \lim\limits_{X \xrightarrow{>} 0} \ln X=-\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \ln(x+1)=-\infty\\ \\ \lim\limits_{x\to -1} x^2-2{,}2x=3{,}2\end{array}\right\}\text{ donc }\boxed{\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=-\infty}$$

   En $+\infty$:

   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1)=+\infty\\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2{,}2x=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

   Ce qui précède nous permet de construire le tableau ci-dessous :

x	-1		0		$0{,}1$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$f(0{,}1)$	↗	$+\infty$

   avec $f(0{,}1)\approx-0{,}0003$

   c) 0 est le maximum de f sur l'intervalle $]-1\,;0{,}1]$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur cet intervalle.
   De plus, en appliquant le théorème de la bijection à f sur $[0{,}1\,;+\infty[$, on obtient une autre solution de $f(x)=0$.
   L'équation **$f(x)=0$ admet donc exactement deux solutions sur $]-1\,;+\infty[$** .

d) Les résultats contredisent les conjectures émises à la question 2.

4. a) On peut prendre, par exemple $-0{,}0004 \leqslant y \leqslant 0{,}0001$ ou $-0{,}0018 \leqslant y \leqslant 0{,}00111$ (pour voir $f(-0{,}1)$ et $f(0{,}2)$).

   b) À l'aide de la calculatrice, par balayage, on obtient $0{,}15 < \alpha < 0{,}16$ donc l'approximation décimale par défaut à 10^{-2} de α est 0,15 . .

5. F est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ (somme, produit...) et pour tout x de $]-1\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}F'(x) &= x^2 - 2{,}2x - 2{,}2 + 2{,}2\ln(x+1) + 2{,}2(x+1) \times \frac{1}{x+1} = x^2 - 2{,}2x - 2{,}2 + 2{,}2\ln(x+1) + 2{,}2\\ &= x^2 - 2{,}2x + 2{,}2\ln(x+1) = f(x)\end{aligned}$$

Donc F est une primitive de f sur $]-1\,;+\infty[$.

Exercice 2 — 8 points

Partie A - Restitution organisée de connaissances

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax} = af(x)$
   Donc f est solution de $y' = ay$.

2. h est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad h'(x) &= g'(x)\mathrm{e}^{-ax} + (-a\mathrm{e}^{-ax})g(x)\\ &= ag(x)\mathrm{e}^{-ax} - a\mathrm{e}^{-ax}g(x), \text{ car } g \text{ est solution de } y' = ay\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc h est une fonction constante .

3. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\text{Si } g \text{ est solution de } y' = ay \quad &\text{alors} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = k \text{ avec } k \text{ constante réelle arbitraire}\\ &\text{alors} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ g(x)\mathrm{e}^{-ax} = k\\ &\text{alors} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = k\mathrm{e}^{ax}\end{aligned}$$

Or, d'après la question 1, les fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{ax}$ sont solutions de $y' = ay$.
Donc l'ensemble des solutions de $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto k\mathrm{e}^{ax}$ avec k constante réelle arbitraire.

Partie B

1. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2+\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}} = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}{\left(2+\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\right) \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}} \text{ car } \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} \neq 0$$

ainsi,

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}+1}}$$

2. En $+\infty$:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} &= 0\\ \lim_{X\to0} \frac{3}{1+2X} &= 3\end{aligned}\right\} \text{donc, par composée, } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3 .$$

En $-\infty$:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} &= +\infty\\ \lim_{X\to+\infty} \frac{3}{1+2X} &= 0\end{aligned}\right\} \text{donc, par composée, } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 .$$

3. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes usuels.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3 \times \frac{-2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}{(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}})^2} = \frac{3}{2} \times \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}{(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}})^2} > 0 \text{ car } \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} > 0$$

D'où $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

Partie C

1. a) Les solutions de (E_1) sont les fonctions g définies sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}$ avec k constante réelle arbitraire.

 b) $g(0) = 1 \Leftrightarrow k\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\times 0} = 1 \Leftrightarrow k = 1$. Ainsi, $\boxed{\forall t \in [0\,;+\infty[,\ g(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}}$.

 c) Il faut résoudre l'inéquation $g(t) \geqslant 3$.

$$\begin{aligned} g(t) \geqslant 3 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{4}t} \geqslant 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}t \geqslant \ln 3 \text{ car } t \longmapsto \ln t \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[\\ &\Leftrightarrow t \geqslant 4\ln 3 \end{aligned}$$

 or $4\ln 3 \approx 4{,}394$
 Ainsi, la population de gazelles dépassera 300 individus au bout de 5 ans.

2. a)

$$\begin{aligned} h \text{ est solution de } (E_3) &\Leftrightarrow \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \forall t \geqslant 0 \\ h(0) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{u}\right)'(t) = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{u}\right)(t) + \dfrac{1}{12} & \forall t \geqslant 0 \\ \left(\dfrac{1}{u}\right)(0) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{u'(t)}{u^2(t)} = -\dfrac{1}{4u(t)} + \dfrac{1}{12} & \forall t \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{u(0)} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -u'(t) = -\dfrac{u(t)}{4} + \dfrac{[u(t)]^2}{12} & \forall t \geqslant 0 \\ u(0) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} & \forall t \geqslant 0 \\ u(0) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{h \text{ est solution de } (E_3) \Leftrightarrow u \text{ est solution de } (E_2)}$$

 b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ sont les fonctions h définies par :
 $h(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$ avec K constante réelle arbitraire.
 De plus $h(0) = 1 \Leftrightarrow K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 0} + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow K = \frac{2}{3}$
 Ainsi, $\boxed{h \text{ est la fonction définie sur } [0\,;+\infty[\text{ par } h(t) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}}$.
 On a alors :

$$\forall t \geqslant 0,\quad u(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 1}$$

 c) On reconnait pour u l'expression de la fonction f étudiée partie B.
 Dans ce modèle la taille de la population tend vers 300 gazelles lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 3 — 5 points

1. (E) est une équation du second degré à coefficients réels dont le discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 153 = -2304 < 0$$

(E) admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{12 + \mathrm{i}\sqrt{2304}}{2 \times 4} = \frac{12 + 48\mathrm{i}}{8} = \boxed{\frac{3}{2} + 6\mathrm{i}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \boxed{\frac{3}{2} - 6\mathrm{i}}$$

2. a) Q est l'image du point B dans la translation de vecteur $\vec{w}$ donc :

$$z_Q = z_B + z_{\vec{w}} = \frac{3}{2} - 6\mathrm{i} - 1 + \frac{5}{2}\mathrm{i}$$
$$\boxed{z_Q = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\mathrm{i}}$$

b) R est l'image du point P par l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$ donc :

$$z_R - z_C = -\frac{1}{3}(z_P - z_C)$$

On a ainsi :

$$z_R = -\frac{1}{3}(z_P - z_C) + z_C = -\frac{1}{3}\left(3 + 2\mathrm{i} + 3 + \frac{1}{4}\mathrm{i}\right) - 3 - \frac{1}{4}\mathrm{i} = -\frac{1}{3}\left(6 + \frac{9}{4}\mathrm{i}\right) - 3 - \frac{1}{4}\mathrm{i} = -2 - \frac{3}{4}\mathrm{i} - 3 - \frac{1}{4}\mathrm{i}$$
$$\boxed{z_R = -5 - \mathrm{i}}$$

c) S est l'image du point P par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donc :

$$z_S - z_A = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z_P - z_A)$$

On a ainsi :

$$z_S = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z_P - z_A) + z_A = -\mathrm{i}\left(3 + 2\mathrm{i} - \frac{3}{2} - 6\mathrm{i}\right) + \frac{3}{2} + 6\mathrm{i} = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{2} - 4\mathrm{i}\right) + \frac{3}{2} + 6\mathrm{i} = -\frac{3}{2}\mathrm{i} - 4 + \frac{3}{2} + 6\mathrm{i}$$
$$\boxed{z_S = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}\mathrm{i}}$$

d) Voir figure ci-dessous.

3. a) $z_R - z_Q = -5 - \mathrm{i} - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\mathrm{i} = -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i}$

$z_S - z_P = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}\mathrm{i} - 3 - 2\mathrm{i} = -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i}$

Ainsi $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$ donc $\boxed{PQRS \text{ est un parallélogramme}}$.

b)

$$\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{-\frac{11}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i}}{3 + 2\mathrm{i} - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\mathrm{i}} = \frac{-\frac{11}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i}}{\frac{5}{2} + \frac{11}{2}\mathrm{i}} = \frac{-11 + 5\mathrm{i}}{5 + 11\mathrm{i}} = \frac{(-11 + 5\mathrm{i})(5 - 11\mathrm{i})}{5^2 + 11^2} = \frac{-55 + 121\mathrm{i} + 25\mathrm{i} + 55}{25 + 121} = \frac{146\mathrm{i}}{146}$$
$$\boxed{\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \mathrm{i}}$$

On en déduit : $z_R - z_Q = \mathrm{i}(z_P - z_Q) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z_P - z_Q)$. R est donc l'image de P par la rotation de centre Q et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Ainsi $QR = QP$ et $\left(\overrightarrow{QP}; \overrightarrow{QR}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

$\boxed{PQRS \text{ est donc un carré}}$.

c) Les diagonales d'un carré ont même longueur. Le centre Ω de $PQRS$ vérifie donc $\Omega P = \Omega Q = \Omega R = \Omega S$.

P, Q, R et S appartiennent donc à un même cercle de centre Ω

Ω est le milieu des diagonales donc :

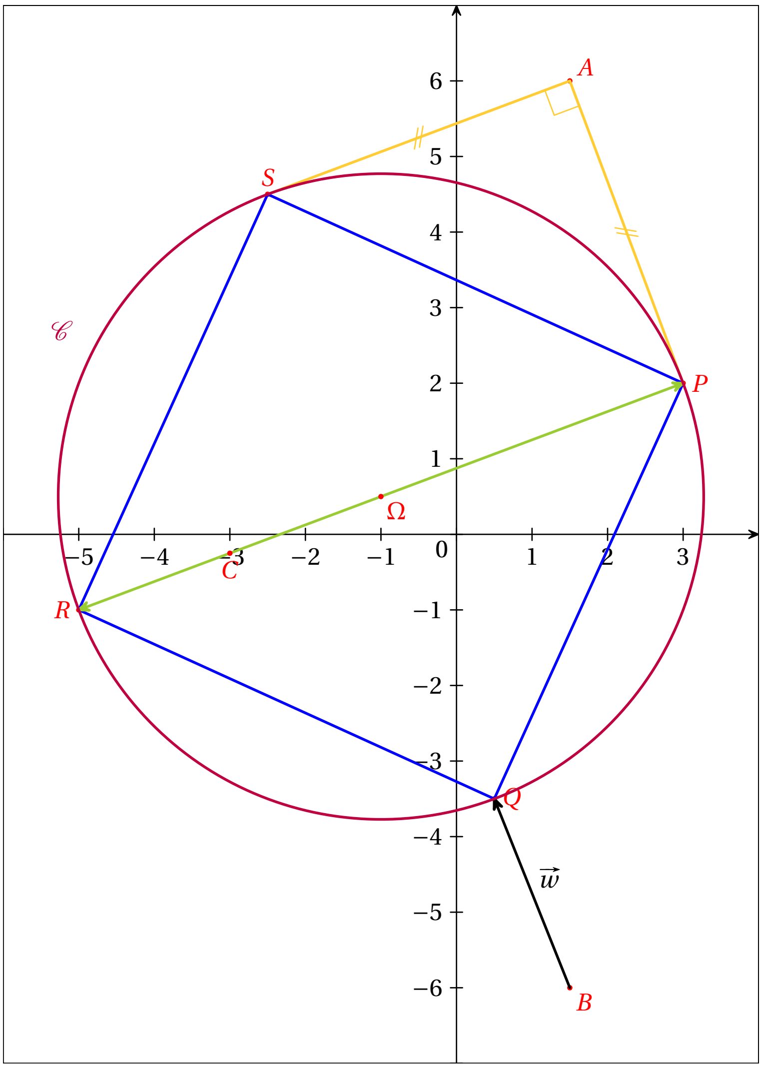
$$z_\Omega = \frac{1}{2}(z_S + z_Q) = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}\mathrm{i}+\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{1}{2}(-2+\mathrm{i}) = -1+\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

$$\rho = \frac{1}{2}PR = \frac{1}{2}|z_P - z_R| = \frac{1}{2}|3+2\mathrm{i}+5+\mathrm{i}| = \frac{1}{2}|8+3\mathrm{i}| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2+3^2} = \frac{\sqrt{73}}{2}$$

4. $\dfrac{z_\Omega - z_P}{z_A - z_P} = \dfrac{-1+\frac{1}{2}\mathrm{i}-3-2\mathrm{i}}{\frac{3}{2}+6\mathrm{i}-3-2\mathrm{i}} = \dfrac{-4-\frac{3}{2}\mathrm{i}}{-\frac{3}{2}+4\mathrm{i}} = \dfrac{8+3\mathrm{i}}{3-8\mathrm{i}} = \dfrac{(8+3\mathrm{i})(3+8\mathrm{i})}{3^2+8^2} = \dfrac{73\mathrm{i}}{73} = \mathrm{i}$

Ainsi $\left(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{P\Omega}\right) = \arg\left(\dfrac{z_\Omega - z_P}{z_A - z_P}\right)\ (2\pi) = \arg(\mathrm{i})\ (2\pi) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Les droites (PA) et $(P\Omega)$ sont donc perpendiculaires et (AP) est donc tangente à $\mathscr{C}$.



Exercice 4 **3 points**

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n+3 > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.
2. a) – Initialisation

$u_0 = 1$ et $0^2 = 0$ donc $u_0 > 0^2$. L'inégalité est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité

  Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons l'inégalité vraie au rang p c'est-à-dire $u_p > p^2$.

  On a $u_{p+1} = u_p + 2p + 3$ donc $u_{p+1} > p^2 + 2p + 3 = (p+1)^2 + 2$

  Ainsi $u_{p+1} > (p+1)^2$. L'inégalité est vraie au rang $p+1$.

- Conclusion

  $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > n^2$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. a) $u_0 = 1$, $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 4$, $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 9$,
   $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 16$, $u_4 = u_3 + 2 \times 3 + 3 = 25$.

   b) Les calculs précédents permettent de conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)^2$.
   Démontrons cette conjecture par récurrence.

   - Initialisation

     $u_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$ donc $u_0 = (0+1)^2$. L'égalité est vraie pour $n = 0$.

   - Hérédité

     Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons l'égalité vraie au rang p c'est-à-dire $u_p = (p+1)^2$.

     On a $u_{p+1} = u_p + 2p + 3 = (p+1)^2 + 2p + 3 = p^2 + 2p + 1 + 2p + 3 = p^2 + 4p + 4 = (p+2)^2$

     Ainsi $u_{p+1} = (p+2)^2$. L'égalité est vraie au rang $p+1$.

   - Conclusion

     $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)^2$.