Devoir Mathématiques N^o 2 (2 heures)

Exercice 1 (obligatoire, 1,5 point) :

Soit f la fonction définie sur sur $I =]-\infty; 1[$ par

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

1. Montrer que f est dérivable sur I.
2. Déterminer alors $f'(x)$.

Exercice 2 (obligatoire, 1,5 points) :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$f(x) + f''(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2.$$

Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (spécialité, 3 points) :

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = n(n^2+5)$ est divisible par 6.

Exercice 4 (3 points) :

Déterminer les primitives de la fonction sur l'intervalle I.

$f_1(x) = (2x-1)\sqrt{x^2-x+1}, \qquad I = \mathbb{R}.$

$f_2(x) = \dfrac{3x^2-5}{(x^3-5x)^3}, \qquad I =]10; +\infty[.$

$f_3(x) = \cos(2x+1), \qquad I = \mathbb{R}.$

$f_4(x) = \tan x + \tan^3 x, \qquad I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[.$

Exercice 5 (2 points) :

Soit $f(x) = \cos^3 x$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$.
2. En déduire la primitive de F telle que $F(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Exercice 6 (4 points) :

F est une fonction définie et dérivable sur $I =]-1; 1[$ telle $F(0) = 0$ et pour tout réel x,

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On admet que cette fonction existe et on ne cherchera pas à donner une expression de $F(x)$.

1. Soit G la fonction définie sur I par

$$G(x) = F(x) + F(-x)$$

a) Justifiez que G est dérivable sur I et calculez $G'(x)$ pour tout réel x.

b) Calculez $G(0)$ et déduisez-en que F est une fonction impaire

2. Soit T définie sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ par :

$$T(x) = F(\sin x) - x$$

a) Calculez $T'(x)$, qu'en déduisez-vous pour la fonction T ?

b) Calculez $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 7 (4 points) :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$$

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et dresser son tableau de variations.
2. Soit (E) l'équation
$$x^3 - 3x^2 = 5$$
Montrer que (E) admet une solution α unique sur $\mathbb{R}$ et déterminer une valaur approchée par défaut de α à 10^{-3}.
3. Montrer *(en utilisant la définition de α)* que
$$\alpha^2 = \frac{5}{\alpha - 3}$$

Exercice 8 (4 points) :

Soit f définie sur $I = [-3;+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$$

1. a) Etudier la dérivabilité de f en -3 et interpréter graphiquement le résultat.
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0, et interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f$.
3. Etudier les variations de f sur I et dresser son tableau de variations.
4. Représenter sommairement la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
