

Devoir de Mathématiques N° 14 (1 heure)

Exercice :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(2; 1; 3)$, $B(-3; -1; 7)$ et $C(3; 2; 4)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

(a) Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

(b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC).

(a) Montrer que H est le barycentre de $(A; -2)$, $(B; -1)$ et $(C; 2)$.

(b) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1 , des points M de l'espace tels que

$$\left(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

En préciser les éléments caractéristiques.

(c) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2 , des points M de l'espace tels que

$$\left\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \sqrt{29}$$

En préciser les éléments caractéristiques.

(d) Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 .

(e) Le point S $(-8; 1; 3)$ appartient-il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 .