Devoir de Mathématiques N^o 13 (2 heures)

Exercice 1 :

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ.

1. (a) Déterminer une expression exacte de λ sachant que $p(T \leqslant 10) = 0,7$.
   On prendra, pour la suite de l'exercice, la valeur $0,12$ comme valeur approchée de λ.
   (b) Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle
   $P_{(T>10)}(T > 15)$.
   (c) Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes.
   On donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à $0,01$ près de la réponse.
2. On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement, 6 caisses sont ouvertes. On désigne par Y la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.
   (a) Donner la nature et les paramètres caractéristiques de Y.
   (b) Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes.
   Déterminer à $0,01$ près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

Exercice 2 :

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On lit le nombre sur la face cachée.
Pour $k \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4)$, on note p_i la probabilité d'obtenr le nombre k sur la face cachée.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 dans cet ordre forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0,4$, montrer que
$$p_1 = 0,1, \qquad p_2 = 0,2, \qquad p_3 = 0,3$$
2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
   (a) Pour $1 \leqslant i \leqslant 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.
   (c) Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geqslant 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.
4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux.
   On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.
   Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.

Exercice 3 :

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :
40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.
On admet qu'au début de chaque année :

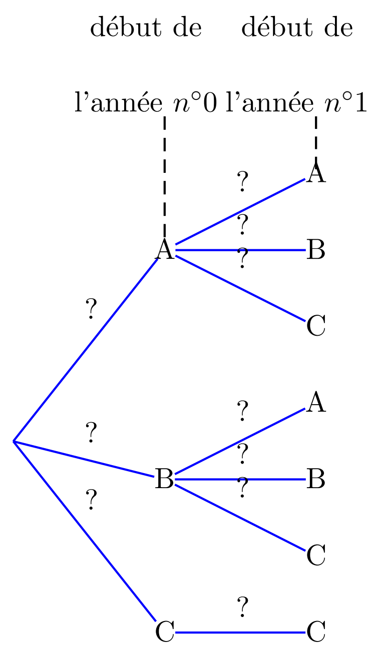
- chaque plante de type A disparaˆit et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaˆit et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaˆit et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type B est $0,3$.
La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type A est $0,3$.
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,
- C_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n et C_n.
Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année $n°0$) on pose : $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



2. (a) Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{cases} p_{n+1} & = & 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} & = & 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$$

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.
   (a) Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison $0,3$.
   (b) Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).
   (c) En déduire les limites des suites (p_n) , (q_n) et (r_n).
   Interpréter le résultat.