Devoir de Mathématiques N^o 13 (2 heures)

Exercice 1 :

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ.

1. (a) Déterminer une expression exacte de λ sachant que $p(T \leqslant 10) = 0,7$.
   On prendra, pour la suite de l'exercice, la valeur $0,12$ comme valeur approchée de λ.
   (b) Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle
   $P_{(T>10)}(T > 15)$.
   (c) Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes.
   On donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à $0,01$ près de la réponse.
2. On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement, 6 caisses sont ouvertes. On désigne par Y la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.
   (a) Donner la nature et les paramètres caractéristiques de Y.
   (b) Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes.
   Déterminer à $0,01$ près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

Exercice 2 :

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On lit le nombre sur la face cachée.
Pour $k \in \{1 \ ; \ 2 \ ; \ 3 \ ; \ 4)$, on note p_i la probabilité d'obtenr le nombre k sur la face cachée.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 dans cet ordre forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0,4$, montrer que
$$p_1 = 0,1, \qquad p_2 = 0,2, \qquad p_3 = 0,3$$
2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
   (a) Pour $1 \leqslant i \leqslant 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.
   (c) Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geqslant 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.
4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux.
   On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.
   Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.

Exercice 3 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
On désigne par A et C les points d'affixes respectives 1 et 2i.
Sur le dessin joint en annexe (à rendre avec la copie), le quadrilatère OABC est un rectangle et I désigne le milieu de [AB].

1. (a) Justifier le fait qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme O en I et A en C.
   (b) Déterminer l'écriture complexe de s. En déduire les éléments caractéristiques de s et, en particulier, établir que l'affixe du centre Ω de s vaut $\dfrac{1+3\mathrm{i}}{5}$.
   (c) Vérifier par un calcul que Ω est situé sur le cercle Γ de centre A passant par O.
2. Soit f l'application du plan complexe d'écriture complexe

$$z \longmapsto \frac{-3-4\mathrm{i}}{5}\overline{z}+\frac{8+4\mathrm{i}}{5}.$$

   (a) Déterminer les images par f des points A et C. En déduire la nature précise de f, puis démontrer que I est l'image de Ω par la symétrie orthogonale d'axe (AC).
   (b) Construire le cercle Γ sur le dessin et placer également le point Ω en utilisant les informations géométriques précédentes.
3. À tout point M d'image M' par s, on associe le point M'' défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{M'M''}=\overrightarrow{\Omega M}$.
   (a) Quel est le point Ω'' associé à Ω ?
   (b) Construire avec soin le point A$''$ en laissant les traits de construction.
   (c) On suppose maintenant que M a pour affixe z.
   Démontrer que M'' a pour affixe $z''=\mathrm{i}z+\dfrac{4+2\mathrm{i}}{5}$.
   En déduire que M'' est l'image de M par une similitude dont on donnera les éléments caractéristiques.
   (d) Déterminer et représenter sur le dessin l'ensemble Γ'' des points M'' lorsque M décrit le cercle Γ.