Durée : 4 heures | Le 14 avril 2010

Devoir de mathématiques

Obligatoire et spécialité

La calculatrice est autorisée

Exercice 1 : Commun à tous les candidats (5 points)

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.
On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$
On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx.$$

1. Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
2. Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2^n}{n!}\left(e^2 - 1\right)$$
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$
4. Démontrer par récurrence que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n$.

Exercice 2 : Commun à tous les candidats (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

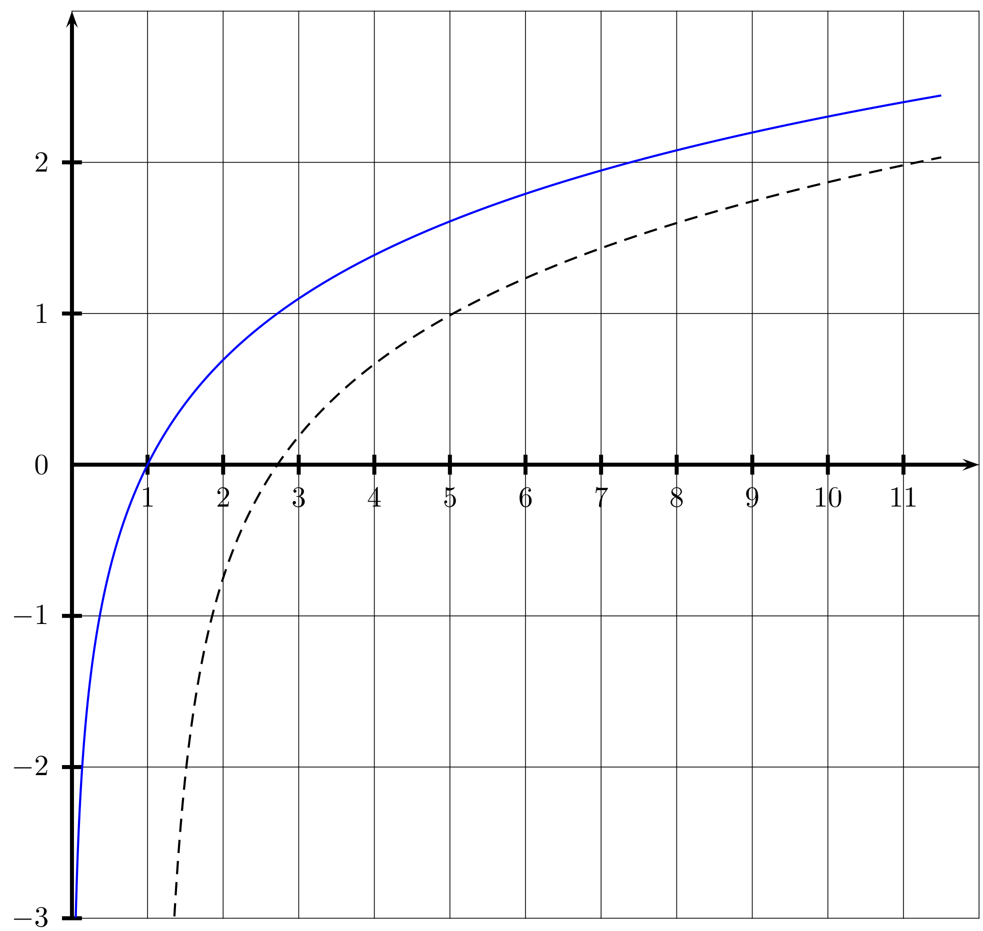
$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}.$$

On nomme $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.
2. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x]$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
   (b) Préciser les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et de Γ.
3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ passant par le point O.
   (a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que la tangente $\mathcal{T}_a$ à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.
   Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par
   $$g(x) = f(x) - xf'(x).$$
   (b) Montrer que sur $]1\ ;\ +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et
   $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.
   (c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$ montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.
   (d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $(\mathcal{C})$ passant par le point O.
   La courbe $(\mathcal{C})$ et la courbe Γ sont données en annexe.
   Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.

4. On considère un réel m et l'équation $f(x) = mx$ d'inconnue x.
   Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]1\,;\,10]$.

Représentations graphiques obtenues à l'aide d'un tableur



Courbe Γ représentative de la fonction ln

Courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f

Exercice 3 : Commun à tous les candidats (5 points)

I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

3. On pose $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$.
   À l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n.$$

4. Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.
5. Étude de la convergence de la suite (u_n).
   (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
   (b) En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.
   (c) On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leqslant w_n$ pour tout n entier naturel, alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} w_n.$$

   Montrer alors que $\dfrac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ.

Exercice 4 : Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A et B d' affixes respectives $z_{\text{A}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$, $z_{\text{B}} = 2\text{i}$.

1. (a) Écrire z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.
   (b) Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
   (c) Déterminer la nature du triangle OAB.
2. On note r la rotation de centre O qui transforme A en B. Pour tout point M d' affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe du point M'.
   (a) Calculer un argument du quotient $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}}$. Interpréter géométriquement ce résultat.
   (b) En déduire l'écriture complexe de la rotation r.
3. Soient Γ le cercle de centre A passant par O et Γ' le cercle de centre B passant par O.
   Soit C le deuxième point d'intersection de Γ et Γ' (autre que O). On note z_{C} son affixe.
   (a) Justifier que le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r.
   (b) Calculer l'affixe z_{I} du milieu I de [AB].
   (c) Déterminer la nature du quadrilatère OACB.
   (d) En déduire que I est le milieu de [OC] puis montrer que l'affixe de C est :

$$z_{\text{C}} = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)\text{i}.$$

4. Soit D le point d'affixe $z_{\text{D}} = 2\text{i}\sqrt{3}$.
   (a) Justifier que le point D appartient au cercle Γ. Placer D sur la figure.
   (b) Placer D′ image de D par la rotation r définie à la question 2.
   On note $z_{\text{D}'}$ l'affixe de D′.
   Montrer que $z_{\text{D}'} = -\sqrt{3} + 3\text{i}$.
5. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{DC}}$ et $\overrightarrow{\text{DD}'}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 : Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5\text{i}$, $b = -4 + 2\text{i}$ et $c = 1 + 4\text{i}$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2\text{i})z + 1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
2. (a) Déterminer l'affixe du point B′ image du point B par f.
   (b) Montrer que les droites (CB′) et (CA) sont orthogonales.
3. Soit M le point d'affixe $z = x + \text{i}y$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
   Soit M' l' image de M par f.
   Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{C}M'}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
4. On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
   (a) Vérifier que le couple $(-4\ ;\ 2)$ est une solution de (E).
   (b) Résoudre l'équation (E).
   (c) En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{\text{C}M'}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$ soient orthogonaux.
   Placer ces points sur la figure.