

Devoir de Mathématiques N° 11 (2 heures)

Exercice 1 : (1,5 points)

Calculer les intégrales suivantes :

1.

$$I = \int_0^1 x(x^2 + 2) dx$$

2.

$$J = \int_{-1}^2 2^x dx$$

Exercice 2 : (5,5 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

1. (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $e^{-x} \leq e^x$.
 (b) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et dresser le tableau de variations (complet) de f sur $[0; +\infty[$.
2. Pour n entier naturel, on considère

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$$

(c) En déduire que (I_n) est décroissante.

(d) Montrer que (I_n) converge.

Exercice 3 : (8 points)

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t dt.$$

1. (a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
 (b) Étudier les variations de la suite (x_n) .
 (c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 (b) En déduire la limite de la suite (x_n) .
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1).$$

(b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.
 Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} ny_n$.

Exercice 4 : (5 points) Obligatoire

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.

On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

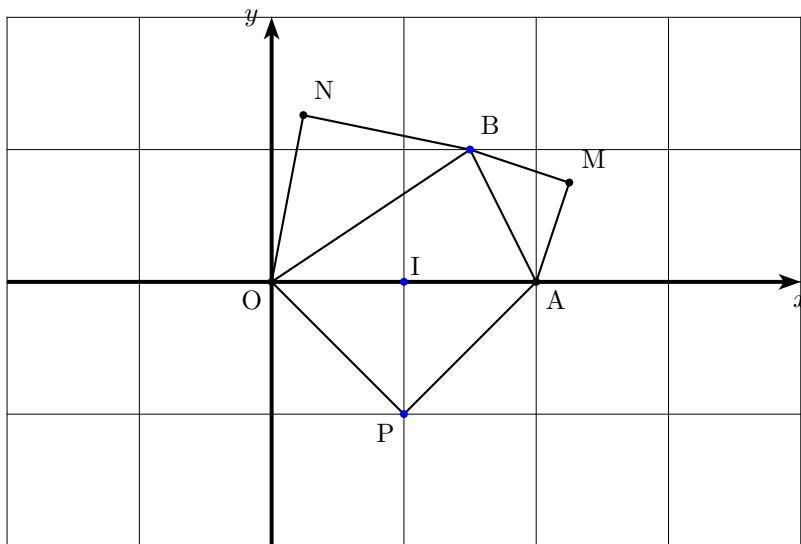
1. Étudier la monotonie de la suite u .
2. (a) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$.
Étudier le sens de variations de la fonction h .
En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1 ; 0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $] -1 ; 0[$.
(b) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.
3. Étudier la convergence de la suite u . Déterminer, si elle existe, sa limite.

Exercice 5 : (5 points) Spécialistes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OJ})$. On considère les points A et B

d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \frac{3}{2} + i$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. À l'aide des transformations

- (a) Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2 .
- (b) Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r .
- (c) Justifier que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
- (d) Quelle est l'image du point O par r ?
- (e) En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. En utilisant les nombres complexes

- (a) Donner les écritures complexes de s_1 et s_2 . On utilisera les résultats de la question 1. a.

_____ **Travail à faire pour le jeudi 18 mars 2010** _____

- (b) En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.
- (c) Donner, sans justification, l'axe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.