# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

**SESSION BLANCHE Février 2010**

## MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **4 heures**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

| |
|---|
| Le sujet est composé de 4 exercices indépendants, le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement dans la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies. |

**Exercice 1 (5 points)**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

*Dans cette partie, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, un résultat de cours.*

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, positive sur $[1\,;+\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif } x,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x$$

1. Étudier les variations de $f$ et en déduire que $f$ admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$.
2. En déduire le signe de $f$ puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
4. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x$.

**Partie B**

Soit $f$ la fonction définie pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $]0\,;1]$ par :

$$f(x) = 1 + x\ln x$$

On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
$T$ est la droite d'équation $y = x$.

1. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.
   (b) En utilisant le signe de $x\ln x$ sur $]0\,;1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in\, ]0\,;1]$, on a : $f(x) \leqslant 1$.
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in\, ]0\,;1]$.
   (b) Vérifier que la droite $T$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
3. On note $g$ la fonction définie pour tout nombre réel $x \in\, ]0\,;1]$ par

$$g(x) = 1 + x\ln x - x$$

   (a) Étudier les variations de $g$ sur l'intervalle $]0\,;1]$ et dresser le tableau de variation de $g$. On ne cherchera pas la limite de $g$ en 0.
   (b) En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $T$.

**Exercice 2 (5 points)**

**Commun à tous les candidats**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ . On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$. On note $A_n$ le point du plan d'affixe $z_n$.

1. Calculer $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ et vérifier que $z_4$ est un nombre réel.
   Placer les points $\mathrm{A}_0$, $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_2$, $\mathrm{A}_3$ et $\mathrm{A}_4$ sur une figure.
2. Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = |z_n|$.
   Justifier que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel $n$,
$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$
3. À partir de quel rang $n_0$ tous les points $A_n$ appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?
4. (a) Établir que, pour tout entier naturel $n$, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i}$.
   En déduire la nature du triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$.
   (b) Pour tout entier naturel $n$, on note $\ell_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   Exprimer $\ell_n$ en fonction de $n$. Quelle est la limite de la suite $(\ell_n)$ ?

**Exercice 3 (5 points)**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la suite $(u_n)$ d'entiers naturels définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 5u_n - 6 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Calculer $u_1,\ u_2,\ u_3$ et $u_4$.
   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de $u_n$ ?
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$.
   En déduire que pour tout entier naturel $k$, $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.
4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de $u_n$ suivant les valeurs de $n$.
5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite $(u_n)$ est constant. Préciser sa valeur.

**Exercice 4 (5 points)**

**Commun à tous les candidats**

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.
En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.
Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction $f$ du temps $t$ (exprimé en années à partir de l'origine 2000).
D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction $f$ est dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante : Une fonction $f$, dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, vérifie, pour tout $t$ de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout $t$ de $[0\ ;\ +\infty[$,
$g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$.
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$\text{(H)} \qquad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

3. En déduire qu'il existe un réel $C$ tel que, pour tout $t$ de $[0\ ;\ +\infty[$

$$f(t) = \exp\left[3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto \mathrm{e}^x$).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction $f$ définie par :

$$f(t) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

   (a) Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

   (b) Déterminer le sens de variation de $f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   (c) Résoudre dans $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.
   Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?