Février 2010.

Bac Blanc

I Ⓐ $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

① f est dérivable d'après les règles de dérivabilité.

$\forall x > 0, \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{\sqrt{x} - 2}{2x}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$, f' est du signe de $\sqrt{x} - 2$.

Signe de $\sqrt{x} - 2$:

$\sqrt{x} - 2 \geqslant 0 \iff \sqrt{x} \geqslant 2$

$\iff x \geqslant 4$ (car $x \mapsto x^2$ croissante sur $\mathbb{R}_+$)

d'où le tableau de variation de f :

x	0		4	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	‖	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$

En $x = 4$ la dérivée s'annule et change de signe (passe de négatif à positif)

d'où en $x = 4$, f admet un minimum qui vaut $f(4) = 2 - 2\ln 2 > 0$.

② On déduit que $\forall x > 0$; $f(x) > 0$ c'est-à-dire $\sqrt{x} - \ln x > 0$

d'où pour $x > 0$, $\ln x < \sqrt{x}$ et par quotient avec $x > 0$: $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

d'autre part, pour $x > 1$, $\ln x > 0$ d'où $\dfrac{\ln x}{x} > 0$.

Finalement $\forall x > 1 \quad 0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

③ $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$. d'où d'après le th. des gendarmes

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

④ $x \ln x = -\dfrac{\ln 1/x}{1/x} \quad \forall x > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} X = 1/x \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 1/x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par composée } \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln 1/x}{1/x} = 0 \text{ d'où } \lim_{x \to 0} x \ln x = 0.$$

Ⓑ $f(x) = 1 + x \ln x$ sur $]0, 1]$

① ⓐ $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ d'après Ⓐ donc par somme $\lim\limits_{0} f = 1$

ⓑ $\forall\, 0 < x \leqslant 1$; $\ln x \leqslant 0$

$\Rightarrow x \ln x \leqslant 0$ ($\times x$ avec $x > 0$)

$\Rightarrow f(x) \leqslant 1$

② ⓐ f dérivable d'après les règles de dérivation et

$\forall\, 0 < x < 1$ on a ; $f'(x) = \ln x + 1$

ⓑ La tangente en $x=1$ a pour équation

$T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ d'où $T_1 : y = (x-1) + 1 \iff T_1 : y = x$.

Donc la tangente au point d'abscisse 1 est bien la droite T.

③ $g(x) = 1 + x\ln x - x \quad \forall x \in]0,1]$

ⓐ On remarque que $g(x) = f(x) - x$ donc g dérivable sur $]0,1]$ et

$\forall\, 0 < x < 1,\ g'(x) = f'(x) - 1$
$= \ln x$ d'où le tableau de variations de g :

x	0		1
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0
$g(x)$	$\Vert$	$\searrow$	0

ⓑ La position relative de $\mathcal{C}_f$ et T est donnée par le signe de $f(x) - x = 1 + x\ln x - x$,

c'est-à-dire que la position relative est donnée par le signe de g.

g étant décroissante sur $]0,1]$ on déduit $x < 1 \Rightarrow g(x) \geqslant g(1)$
$\iff g(x) \geqslant 0$

On déduit finalement que $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de T.

Ⓘⓘ $\forall n \in \mathbb{N} ;\ z_{n+1} = \dfrac{i+1}{2} z_n \ ;\ z_0 = 2.$

① $z_1 = \dfrac{1+i}{2} \times 2 = 1+i$

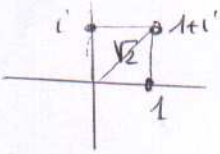
$z_2 = \dfrac{1+i}{2} \cdot z_1 = \dfrac{(1+i)^2}{2} = i$

$z_3 = \dfrac{1+i}{2} \times i = \dfrac{i-1}{2}$

$z_4 = \dfrac{1+i}{2} \cdot \dfrac{i-1}{2} = \dfrac{1}{4} \times (-2) = -\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$

② $\forall n \in \mathbb{N} ;\quad u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+i}{2} z_n\right|$

$= \left|\dfrac{1+i}{2}\right| \times |z_n| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} u_n$



d'où (u_n) géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$
et premier terme $u_0 = 2$.

On a alors $u_n = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

③ A_n point du disque de centre O et rayon $0{,}1 \iff |u_n| < 0{,}1$

$\iff 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 0{,}1$

$\iff n \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) < \ln(0{,}05)$ (car $\ln$ ↗ sur]

$\iff n > \dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ (car $\ln \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$

et $\dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \simeq 8{,}64$ d'où à partir du rang 9 les points A_n sont dans le disque $D(O,0$

④ $\forall n \in \mathbb{N}$; $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \dfrac{\frac{1+i}{2} z_n - z_n}{\frac{1+i}{2} z_n}$

$= \dfrac{\frac{1+i}{2} - 1}{\frac{1+i}{2}}$ (on simplifie par $z_n \neq 0$ car $|z_n| = u_n \neq 0$ $\forall n \in$

$= \dfrac{1+i-2}{1+i} = \dfrac{i-1}{1+i} = \dfrac{i(1+i)}{1+i} = i$.

On déduit donc que $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_{n+1} - z_n = i z_{n+1}$

$\iff z_n - z_{n+1} = i(0 - z_{n+1})$ et $i = e^{+i\pi/2}$

donc dans la rotation de centre A_{n+1} ; et d'angle $+\frac{\pi}{2}$, O a pour image A_n

donc OA_nA_{n+1} rectangle isocèle en A_{n+1}.

ⓑ $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$

$= OA_1 + OA_2 + \cdots + OA_n$ car OA_nA_{n+1} isocèle en $A_{n+1} \Rightarrow A_nA_{n+1} = OA_{n+1}$

$= u_1 + \cdots + u_n$

$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cdots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} \dfrac{1 - (1/\sqrt{2})^{n+1}}{1 - 1/\sqrt{2}}$ d'après la formule $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

finalement, $\ell_n = \dfrac{2\left(1 - (1/\sqrt{2})^n\right)}{\sqrt{2} - 1}$

et $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \ell_n = \dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$ (par composée)

III Enseignement de spécialité

$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

① $u_1 = 5u_0 - 6 = 64$
$u_2 = 5u_1 - 6 = 314$
$u_3 = 5u_2 - 6 = 1564$
$u_4 = 5u_3 - 6 = 7814$

On peut donc conjecturer que les deux derniers chiffres de u_n sont 64 si n est impair et 14 si n est pair.

② $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6$
$= 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36$

et $\left.\begin{array}{l} 25 \equiv 1\ (4) \\ 36 \equiv 0\ (4) \end{array}\right\} \Rightarrow u_{n+2} \equiv u_n \quad (4).$

Soit $k \in \mathbb{N}$, on a alors $u_{2k} \equiv u_{2(k-1)} \equiv u_{2(k-2)} \equiv \cdots\cdots \equiv u_0 \quad (4)$

donc $u_{2k} \equiv 14 \equiv 2\ (4)$

et $u_{2k+1} \equiv u_{2k-1} \equiv u_{2(k-2)+1} \equiv \cdots\cdots \equiv u_1$

donc $u_{2k+1} \equiv u_1 \equiv 64 \equiv 0\ (4)$.

③ⓐ Soit P_n la propriété $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.
Etape 1 : $2u_0 = 28$; $5^2 + 3 = 28$ donc pour $n = 0$ on a bien $u_n = 5^{n+2} + 3$
Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie. $\Rightarrow P_0$ vraie.

$2u_{q+1} = 2(5u_q - 6)$
$= 5(2u_q) - 12$
$= 5(5^{q+2} + 3) - 12$ (car P_q vraie donc $2u_q = 5^{q+2} + 3$)
$= 5^{q+3} + 3$ d'où P_{q+1} vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, c'est-à-dire $2u_n = 5^{n+2} + 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 25 \times 5^n + 3$ d'où $2u_n \equiv 3 \ (25)$
donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2u_n = 3 + 25k$. $(*)$
d'autre part d'après ② $2u_n \equiv 0\ (4) \ \forall n \in \mathbb{N}$.
donc $3 + 25k \equiv 0\ (4) \Leftrightarrow -1 + k \equiv 0\ (4)$ d'où $k \equiv 1\ (4)$
donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 1 + 4k'$
En reprenant $(*)$ on a alors $2u_n = 3 + 25(1 + 4k')$
$= 28 + 100k' \Rightarrow 2u_n \equiv 28\ (100)$

④ $2u_n \equiv 28\ (100) \ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow 2u_n = 28 + 100k$; $k \in \mathbb{Z}$ c'est
$\Rightarrow u_n = 14 + 50k$.
si n est pair alors d'après ② $u_n \equiv 2\ (4) \Leftrightarrow 14 + 50k \equiv 2\ (4)$
$\Leftrightarrow 2 + 2k \equiv 2\ (4) \Leftrightarrow 2k = 4k'$
où $k' \in \mathbb{Z}$
d'où $k = 2k'$ et donc $u_n = 14 + 100k'$
$\Rightarrow u_n = 14 + 100k' \Rightarrow$ les deux derniers chiffres de u_n sont 14.

si n impair alors de même,

d'après ② $u_n \equiv 0 \ (4)$

$\Leftrightarrow 14 + 50k \equiv 0 \ (4)$

$\Leftrightarrow 2 + 2k = 4k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow k = 2k' - 1$

d'où $u_n = 14 + 100k' - 50$

$= 64 + 100(k' - 1) \Rightarrow$ les deux derniers chiffres de u_n sont 64.

Conclusion : si n impair u_n se termine par 64 et si n pair u_n se termine par 14.

⑤ D'après la formule fondamentale

$PGCD(u_{n+1}, u_n) = PGCD(5u_n - 6, u_n)$

$= PGCD(-6, u_n) = PGCD(6, u_n)$

donc $PGCD(6, u_n) \mid 6 \Rightarrow PGCD(6, u_n) \in \{1, 2, 3, 6\}$.

d'après ② u_n est pair $\Rightarrow 2 \mid u_n$ d'où $PGCD(6, u_n) \neq 1$

d'autre par 3 ne divise pas u_n sinon $2u_n$ est divisible par 3

d'où d'après ③a $5^{n+2} + 3$ divisible par $3 \Rightarrow 5^{n+2}$ divisible par 3 impossible

On déduit donc que $PGCD(6, u_n)$ n'est pas divisible par 3

d'où $PGCD(6, u_n) = 2$.

III Enseignement non spécialiste

① ⓐ $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + n - 1$

donc $u_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow u_2 = \frac{1}{2} u_1 + 1 - 1 = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow u_3 = \frac{1}{2} u_2 + 2 - 1 = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$.

ⓑ Soit P_n la propriété $u_n \geq 0$.

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 3$ P_n est vraie.

Etape 1 : Pour $n = 3$; $u_3 = \frac{7}{8} \geq 0 \Rightarrow P_3$ vraie.

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie $\Rightarrow u_q \geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} u_q \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} u_q + q - 1 \geq q - 1$

$\Rightarrow u_{q+1} \geq q - 1$ et comme $q \geq 3$ $q - 1 \geq 0$

$\Rightarrow u_{q+1} \geq 0 \Rightarrow P_{q+1}$ vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$; $u_n \geq 0$

ⓒ $\forall n \geq 1$; $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + n - 2$

et d'après ⓑ $\forall n \geq 4$; $u_{n-1} \geq 0$

Donc $u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + n - 2 \geq n - 2 \quad \forall n \geq 4$

ⓒ $\lim_{n \to +\infty} n-2 = +\infty$ donc d'après le th. de comparaison, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

② $v_n = 4u_n - 8n + 24 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24$

$$= 4\left(\tfrac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8(n+1) + 24$$
$$= 2u_n - 4n + 12$$
$$= \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24)$$
$$= \frac{1}{2} v_n$$

d'où (v_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 4u_0 + 24$
$= 28$.

ⓑ (v_n) s'écrit alors de manière explicite : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 28$

d'autre part $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4u_n - 8n + 24$

$\Rightarrow 4u_n = v_n + 8n - 24 \Rightarrow u_n = \frac{1}{4} v_n + 2n - 6$

d'où $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

ⓒ. Soit $x_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $n \in \mathbb{N}$

alors (x_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et premier terme $x_0 = 7$

. Soit $y_n = 2n - 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

alors (y_n) arithmétique de raison 2 et premier terme $y_0 = -6$.

On a alors $u_n = x_n + y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ⓓ $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

$= u_0 + u_1 + \dots + u_n = x_0 + y_0 + x_1 + y_1 + \dots + x_n + y_n$
$= (x_0 + \dots + x_n) + (y_0 + \dots + y_n)$

Par théorème : $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 7\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$$= 7 \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 14\left(1 - (1/2)^{n+1}\right)$$

et $y_0 + \dots + y_n = \frac{(y_0 + y_n)(n+1)}{2} = \frac{(2n-12)(n+1)}{2} = (n-6)(n+1)$

Donc finalement $S_n = 14\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + (n-6)(n+1)$

IV

① $g = \ln(f)$ satisfait $g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}$ $\forall t \geq 0$

$\iff \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{20}\ln(f(t)) - \frac{3}{20}$ $\forall t \geq 0$

$\iff f'(t) = -\frac{3}{20} f(t) + \frac{1}{20} f(t)\ln(f(t))$ $\forall t \geq 0$

$\iff f'(t) = -\frac{f(t)}{20}\left(3 - \ln(f(t))\right)$ $\forall t \geq 0.$

L'équivalence est donc démontrée

② (H): $z' = \frac{1}{20} z - \frac{3}{20}$.

par th les solutions de (H) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$z(t) = Ke^{t/20} + 3$ avec K constante.

③ D'après ①, f solution de (E) $\iff$ $\ln(f)$ solution de (H)

donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(f(t)) = Ke^{t/20} + 3$ $t \geq 0$

donc $f(t) = \exp(Ke^{t/20} + 3)$ $t \geq 0$.

④ ⓐ On a $f(t) = \exp(3 - 3\exp(t/20))$

$\left.\begin{array}{l} X = t/20 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} t/20 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ par composée $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{t/20} = +\infty$

d'où par somme et produit, $\lim\limits_{t \to +\infty} 3 - 3e^{t/20} = -\infty$.

d'autre par $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

d'où par composée $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

ⓑ f solution de (E)

$\Rightarrow \forall t \geq 0$ $f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)\left(3 - \ln(f(t))\right)$

f étant une exponentielle, on déduit que $f(t) \geq 0$ d'où le signe de $f'(t)$

est celui de $\ln(f(t)) - 3 = -3e^{t/20}$

donc on déduit, $\forall t \geq 0$. $f'(t) \leq 0$ d'où f décroissante sur $\mathbb{R}_+$

ⓒ $f(t) < 0{,}02 \iff 3 - 3e^{t/20} < \ln(0{,}02)$ (car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\iff e^{t/20} > \frac{3 - \ln(0{,}02)}{3}$

$\iff t > 20\ln\left(\frac{3 - \ln(0{,}02)}{3}\right)$ (car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$20\ln\left(\frac{3 - \ln 0{,}02}{3}\right) \simeq 16{,}7$

Donc au bout de 16,7 ans, l'effectif passe en-dessous de 20 individus.