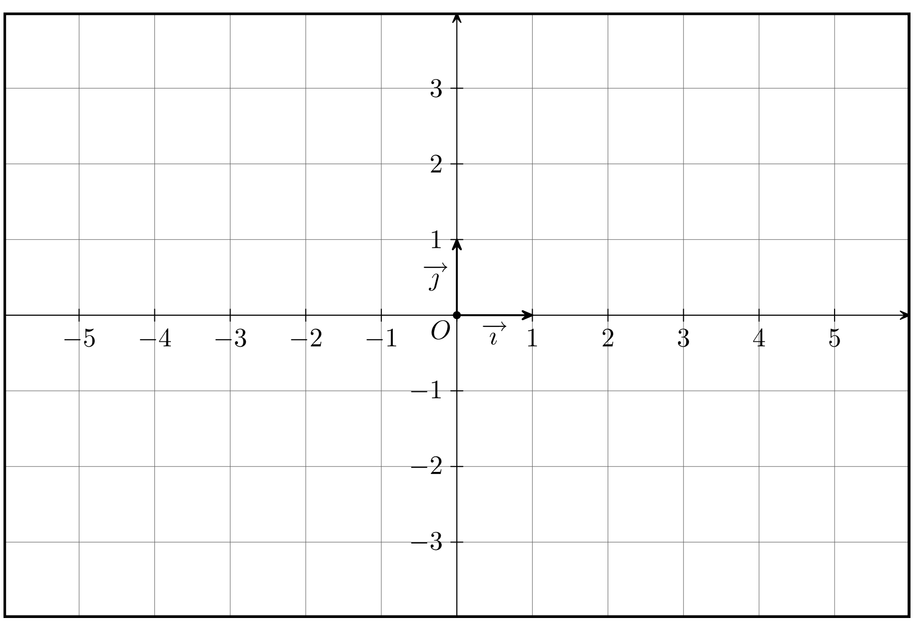
Devoir de Mathématiques N^o 9 (1 heure)

Exercice 1 : (10 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On note A et B les points d'affixes respectives $-\mathrm{i}$ et $3\mathrm{i}$.
On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z + 3}{z + \mathrm{i}}$$

1. Étude de quelques cas particuliers.
   (a) Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre [AB].
   Placer ces points sur le dessin.
   (b) On note C le point d'affixe $c = -2 + \mathrm{i}$. Démontrer que le point C′, image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.
2. Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que
   $\arg(z') = \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) + \frac{\pi}{2}$ à 2π près.
3. Étude de deux ensembles de points.
   (a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.
   (b) Soit M d'affixe z un point du cercle de diamètre [AB] privé des points A et B. À quel ensemble appartient le point M' ?



Exercice 2 : (10 points)

Soit (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par , $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n \left(20 - u_n\right).$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x).$$

   (a) Étudier les variations de f sur $[0\,;\,20]$.

   (b) En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$, $f(x) \in [0\ ;\ 10]$.

   (c) On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal. Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.