Devoir de Mathématiques N^o 8 (1 heure)

Exercice 1 : (14 points)

Le plan complexe est muni d'un repére orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On prendra 2 cm pour unité graphique.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. (a) Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
   (b) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
   Placer les points A, B et B'.
2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que
$$z' = (1 + \mathrm{i})z + 1.$$
   (a) Montrer que B a pour image B' par f.
   (b) Montrer que A est le seul point invariant par f.
   (c) Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\dfrac{z' - z}{\mathrm{i} - z} = -\mathrm{i}$.
   Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
   En déduire une méthode de construction de M' à partir de M, pour M distinct de A.
3. (a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 2| = \sqrt{2}$.
   (b) Démontrer que $z' - 3 - 2\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})(z - 2)$.
   En déduire que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.
   (c) Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.

Exercice 2 : (6 points)

Soit $z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :
   ☐ $2\sqrt{2}$ ☐ $2 + \sqrt{2} + \mathrm{i}(2 - \sqrt{2})$
   ☐ $2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$ ☐ $2\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2}$

   Justifier votre réponse.
2. Déterminer la forme exponentielle de z^2.
3. En déduire la forme exponentielle de z.