

## Devoir de Mathématiques N° 5 (1 heure)

---

### Exercice

- On donne  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ . Déterminer la limite de  $f$  en 0.
- Résoudre  $e^{2x} - 4e^x + 3 \geq 0$ .
- On donne  $f(x) = \ln(e^{2x} + 3x)$  sur  $D = \mathbb{R}_+$ . On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ . Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ .

### Problème

#### A - Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

Démontrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ .

#### B - Étude d'une fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

On note  $(\mathcal{C})$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

Étudier les variations de la fonction  $f$  et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.

#### C - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif  $k$ , on note  $f_k$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_k(x) = (x + 1)e^{kx}.$$

On note  $\mathcal{C}_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas  $k = -1$  a été traité dans la partie B, car on a  $f_{-1} = f$  et  $\mathcal{C}_{-1} = \mathcal{C}$ .

- (a) Quelle est la nature de la fonction  $f_0$  ?  
(b) Déterminer les points d'intersection des courbes  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_1$ .  
Vérifier que, pour tout entier  $k$ , ces points appartiennent à la courbe  $\mathcal{C}_k$ .
- Étudier, suivant les valeurs du réel  $x$ , le signe de l'expression :  $(x + 1)(e^x - 1)$ .  
En déduire, pour  $k$  entier relatif donné, les positions relatives des courbes  $\mathcal{C}_k$  et  $\mathcal{C}_{k+1}$ .
- Calculer  $f'_k(x)$  pour tout réel  $x$  et pour tout entier  $k$  non nul.  
En déduire le sens de variation de la fonction  $f_k$  suivant les valeurs de  $k$ . (On distinguera les cas :  $k > 0$  et  $k < 0$ .)
- Le graphique suivant représente quatre courbes  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}$ , et  $\mathcal{K}$ , correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre  $\times k$ , parmi les entiers  $-1, -3, 1$  et  $2$ .  
Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.

