Devoir de Mathématiques N^o 4 (2 heures)

Le barème est approximatif et l'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1 : (2 points)

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{7}{1-3x} + \dfrac{1}{(1-3x)^3}$ sur $D =]\dfrac{1}{3}; +\infty[$.
2. $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $D = \mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 2 : (2 points)

Etudiez les limites

1. $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{\ln^2(x)}$ en $+\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. en $+\infty$.

Exercice 3 : (2 points - *Non spécialiste*)

Résoudre

1. $(7x-5)\ln(x+1) > 0$
2. $\ln(5-x) - \ln 3 + \ln(x-1) \leq 0$.

Exercice 4 : (2 points - *Spécialistes*)

1. Quels sont les restes possibles de la division de 3^n par 11 ?
2. En déduire les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $3^n + 7 \equiv 0 \quad (11)$.

Exercice 5 : (2,5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chque question une seule réponse est exacte. Il est attribué 0,5 point si la réponse est correcte, aucun si il n'y a pas de réponse et on enlève 0,25 point pour toute réponse fausse. En cas de total négatif, la note à l'exercice est nulle.

1. Soit f dérivable sur $]-1;1[$ telle que $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ alors f s'écrit (K étant une constante) :
   - ☐ $f(x) = \dfrac{x^2}{\dfrac{x^3}{3} - x} + K$
   - ☐ $f(x) = \ln(x^2-1) + K$
   - ☐ $f(x) = \ln(1-x^2) + K$
2. $\ln(20\ 000) - 4(\ln 5 + \ln 2)$ est égal à :
   - ☐ $-\ln(\dfrac{1}{2})$
   - ☐ $f(x) = \ln\left(\dfrac{20\ 000}{40}\right)$
   - ☐ 0
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{\tan x} =$
   - ☐ 0
   - ☐ 7
   - ☐ $+\infty$
   - ☐ $\dfrac{1}{7}$
4. L'ensemble des solutions de $\ln(x^2) - 2\ln x = 0$ est
   - ☐ $\mathbb{R}$
   - ☐ $\mathbb{R}_+$
   - ☐ $\mathbb{R}_+^\star$
   - ☐ Autre.
5. L'équation $\ln(x^2) = \ln\dfrac{1}{x}$ admet
   - ☐ Une solution.
   - ☐ Trois solutions.
   - ☐ Deux solutions.
   - ☐ Autre.

Exercice 6 : (3 points)

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, un résultat de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, positive sur $[1;+\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y, \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x, \ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

1. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Exercice 7 : (4,5 points)

Soit f dédinie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x - \ln x} & \text{pour } x > 0 \\ -1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to0}[f(x)+1] = 0$ et en déduire que f est continue en 0.

   (b) Démontrer que f est dérivable en 0. Déterminer $f'(0)$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire ?
2. Etudier la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
3. Montrer que le signe de f' est celui de $(1 - \ln x)$. Dresser le tableau de variation de f.
4. Préciser le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses et déterminer l"équation de la tangente en ce point. Tracer sommairement la fonction f.

Exercice 8 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$$

1. On appelle g la fonction définie sur I par $g(x) = \tan x - x$.
   (a) Déterminer les limites de g aux bornes de I.
   (b) Étudier les variations de g.
   (c) Calculer $g(0)$ et déterminer le signe de $g(x)$ sur I.
2. (a) Justifier que f est dérivable sur I et calculer f'.
   (b) Factoriser $f'(x)$ pour tout x de I puis, en utilisant la question 1, déterminer le signe de $f'(x)$ sur I.
   (c) Déterminer les variations de f sur I. En déduire le signe de f sur I.